ANNALI DI MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

Serie IV - Tomo LVII - 1962

(CXXIX della Raccolta)

Sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

1962

ANNALI DI MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

Direttore: F. SEVERI (Roma) — Condirettore: G. SANSONE (Firenze)

Comitato di Redazione

E. BOMPIANI (Roma) - C. MIRANDA (Napoli) - B. SEGRE (Roma) - A. SIGNORINI (Roma)

Questo giornale, il più antico periodico scientifico d'Italia, pubblica soltanto memorie originali, opera di collaboratori italiani o stranieri: esse vengono stampate in lingua italiana, inglese, francese o tedesca.

La pubblicazione è giunta attualmente alla quarta serie:

I SERIE - pubblicata a Roma dal 1850 al 1866, constava di 15 volumi, completamente esauriti.

II SERIE - pubblicata a Milano dal 1867 al 1897, consta di 26 volumi. Della I e II Serie venne pubblicato nel 1904 l'Indice Generale. (Sono esauriti i volumi I, II, III, IV, V, VI, VII, XXII, XXIV, XXV, XXVI).

III SERIE - pubblicata a Milano dal 1898 al 1922 consta di 31 volumi, due dei quali (XX e XXI) dedicati alla memoria del matematico Lagrange, in occasione del centenario della sua morte, nel 1913. (Sono esauriti i volumi I a XIX, XXII, XXIII, XXIX, XXX). È in vendita l'Indice Generale della III serie.

IV SERIE - si pubblica a Bologna dal novembre 1923. Sono in vendita i Tomi dall'I a LVI.

Per l'acquisto dei volumi della serie II, III, e della IV serie dal volume I al volume LVI, rivolgersi alla Casa Editrice Nicola Zanichelli in Bologna, Via Irnerio, 34.

Per la Redaz. e per la parte scientifica, dirigersi ad uno dei componenti il Comit. di Direzione.

Per ogni fatto pertinente all'Amministrazione dirigere esclusivamente

a

NICOLA ZANICHELLI EDITORE IN BOLOGNA

Prezzo di ogni volume: L. 6.000 in Italia - L. 7.000 all'Estero

---

NORME PER GLI AUTORI

I manoscritti vanno diretti ad uno dei componenti il Comitato di Direzione. Si desidera che i manoscritti siano perfettamente leggibili e possibilmente scritti a macchina; per i lavori non redatti in lingua italiana, la scrittura a macchina è indispensabile. Si rivolge viva preghiera agli Autori di usare la massima discrezione nelle modificazioni, ora costosissime, sulle bozze di stampa: le correzioni non puramente tipografiche essendoci addebitate dalla Stamperia.

Gli Autori hanno diritto a N. 50 copie estratti, gratuite. Volendone un numero maggiore o con copertina speciale, rivolgersi direttamente alla Cooperativa Tipografica Azzoguidi Via Emilia Ponente, 421-B, Bologna.

WUNDERLICH, WALTER
1962
Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. LVII, pp. 97-108

Römerflächen mit ebenen Fallinien.

Nota di WALTER WUNDERLICH (Wien), Austria

Enrico Bompiani zu seinem wissenschaftlichen Jubiläum.

Zusammenfassung. - *In der vorliegenden Note werden drei metrisch spezielle* STEINERsche Römerflächen *vorgeführt, die dadurch ausgezeichnet sind, dass sie* ebene Fallinien *besitzen. Da weder an typischen Sonderformen der Steinerschen Fläche noch an Beispielen für Flächen mit ebenen Fallinien Überfluss herrscht, dürfen die hier behandelten, auch in anderer Hinsicht bemerkenswerten Flächen vielleicht ein gewisses Interesse beanspruchen.*

I.

Im Gegensatz zu den vom Büschel der Horizontalebenen aus einer Fläche ausgeschnittenen *Schichtenlinien* sind deren orthogonale Trajektorien, die *Fallinien*, im allgemeinen echte Raumkurven. Gelegentlich finden sich jedoch Hinweise auf besondere Flächen, deren sämtliche Fallinien gleichfalls ebene Kurven sind. Abgesehen von den *Gesimsflächen* mit lotrechtem Evolutenzylinder — einschliesslich der Drehflächen mit lotrechter Achse und den Horizontalzylindern als Grenzformen — bei welchen die Fallinien in Vertikalebenen verlaufen, wären hier als nichttriviale Beispiele die von E. MÜLLER bestimmten *Schraubflächen* mit ebenen Fallinien (1) und die analogen *Spiralflächen* (2) zu erwähnen: Gestützt auf die Tatsache, dass die Falltangenten einer Schraub- oder Spiralfläche mit lotrechter Achse dem quadratischen Bahntangentenkomplex angehören, werden die genannten Flächen von ebenen Komplexkurven erzeugt, also von gewissen *Parabeln*.

Interessante Beispiele *algebraischer Flächen* mit *Kegelschnitten* als Schichten- und Fallinien gab L. ECKHART (3); es handelt sich dabei um Flächen 4. Ordnung und Klasse, deren Schichtenplan aus konfokalen

(1) E. MÜLLER: Eine Abbildung krummer Flächen auf eine Ebene und ihre Verwertung zur konstruktiven Behandlung der Schraub- und Schiebflächen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 120 (1911), 1763-1810, insb. 1797.

(2) W. WUNDERLICH: Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Mh. Math. Phys. 46 (1938), 248-265, insb. 255.

(3) L. ECKHART: Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallinien Kegelschnitte sind. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 131 (1922), 417-427.

Hyperbeln oder Ellipsen gebildet wird. Der abschliessend nur nebenbei erwähnte Grenzfall mit der kartesischen Gleichung

$$y^2 = 2xz^2 + z^4 \tag{1}$$

sei die erste hier näher zu betrachtende Fläche Φ_I.

Die reellen Schichtenlinien $z = \text{const}$ sind in Richtung der positiven x—Achse geöffnete *Parabeln*, die im Grundriss (Normalprojektion auf die xy—Ebene) die eine Hälfte einer konfokalen Schar bilden. Die andere Hälfte, welche die erste orthogonal durchsetzt, rührt von den ebenen Schnitten $z/y = \text{const}$ her, die daher die Fallinien der Fläche Φ_I darstellen. Die ebenen Schnitte $y/x = \text{const}$ zerfallen in je zwei «Meridianparabeln», die den Koordinatenursprung O zum gemeinsamen Scheitel haben und daselbst die z—Achse berühren. Hieraus ist zu erkennen, dass die Fläche Φ_I neben der x—Achse als eigentlicher Doppelgerade noch zwei in der Ferngerade der xy—Ebene zusammengerückte Doppelgeraden besitzt; aus der Existenz dieser drei Doppelgeraden folgt aber bereits, dass die vorliegende Fläche 4.Ordnung in der Tat eine *Steinersche Römerfläche* ist. Dies erkannte zuerst K. STRUBECKER, der auf dieselbe Fläche beim Studium von gewissen kubischen, mit Schraubungen verknüpften Verwandtschaften stiess (4): Bei einer euklidischen Schraubung sind die Raumpunkte und ihre Bahnschmiegebenen durch ein kubisches Nullsystem verknüpft, das ein ebenes Punktfeld allgemeiner Lage in eine Fläche 3.Klasse und 4.Ordnung vom Typ Φ_I transformiert.

Nicht beachtet wurde bisher anscheinend das Vorhandensein einer eingliedrigen kontinuierlichen Gruppe von *projektiven Automorphien* der Fläche Φ_I: Sie wird durch die ∞^1 Affinitäten

$$x' = t^2x,\ y' = t^2y,\ z' = tz \tag{2}$$

in sich übergeführt, wobei sich ihre Punkte auf den erwähnten Meridianparabeln fortbewegen und die Schichtenlinien ebenso wie die Fallinien untereinander vertauscht werden.

Hervorgehoben sei schliesslich, dass die Fläche Φ_I eine *Potentialfläche* ist, nämlich das über der GAUSSschen ζ—Ebene errichtete Relief des Realteils der komplexen analytischen Funktion

$$\omega = \sqrt{-2\zeta}. \tag{3}$$

---

(4) K. STRUBECKER: Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 140 (1931), 545-578, insb. 578.

Setzen wir zum Nachweis $\zeta = x + iy$ und $\omega = u + iv$, so erhalten wir durch Vergleich der Real- und Imaginärteile von $\omega^2 = -2\zeta$ für die Diagrammfläche von $\Re(\omega) = u$ die Parameterdarstellung

$$x = \frac{1}{2}(v^2 - u^2),\ y = -uv,\ z = u, \tag{4}$$

deren Äquivalenz mit (1) sofort zu bestätigen ist. Die Parameterlinien $u = \text{const}$ bzw. $v = \text{const}$ sind dabei gerade die Schichten- bzw. Fallinien der Fläche, deren negativer Mantel in Abb. 1 anschaulich dargestellt

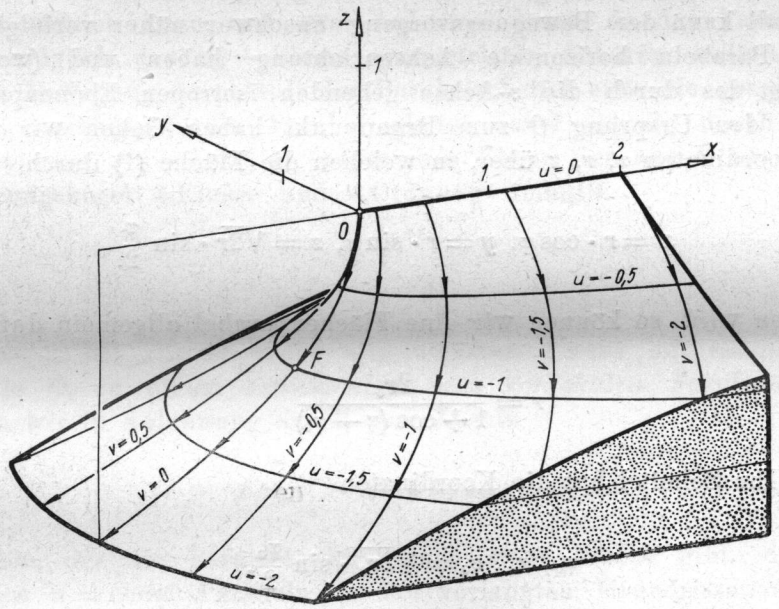

Abb. 1

ist. — Wie K. STRUBECKER gezeigt hat, können derartige Potentialflächen als *Minimalflächen eines isotropen Raumes* mit der durch das Bogenelement $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erklärten Metrik aufgefasst werden ( ). Als solche sind sie

(5) K. STRUBECKER: Über Potentialflächen. Arch. Math. 5 (1954), 32-38. — Solche Flächen sind auch dadurch gekennzeichnet, dass ihr *Schmieglinienetz* im Grundriss als *Orthogonalsystem* erscheint. Im vorliegenden Fall findet man auf Grund der Darstellung (5) für den Grundriss der Asymptotenlinien die Polargleichung $r \cdot \cos^4(\varphi/4) = \text{const}$ bzw. $r \cdot \sin^4(\varphi/4) = \text{const}$; es handelt sich um untereinander zentrisch-ähnliche *Sinusspiralen* vom Index -1/4 (die dritten negativen Fusspunktkurven von y-parallelen Geraden).

auch als *Schiebflächen* erzeugbar, wobei sich die Schiebkurven auf die (voll-) isotropen Ebenen $x \pm iy = \text{const}$ verteilen; im vorliegenden Fall entsteht Φ_I durch Verschiebung des (imaginären) parabolischen *Kreises* $x = -iy = -z^2$ längs des konjugierten Kreises $x = iy = -z^2$ oder umgekehrt.

Merkwürdigerweise ist aber Φ_I — wie alle Römerflächen, die die Fernebene längs einer Linie berühren — auch in reeller Weise als *Bewegfläche* erzeugbar: Sämtliche Tangentialschnitte zerfallen nämlich in Parabelpaare, und unter den demzufolge auf der Fläche vorhandenen ∞^2 Parabeln müssen offenbar je ∞^1 untereinander kongruent sein; die Steinerfläche kann demnach sogar auf ∞^1 Arten durch Bewegung einer starren *Parabel* gewonnen werden, im allgemeinen allerdings nur zonenweise. — Im vorliegenden Fall kann der Bewegungsvorgang unschwer näher verfolgt werden, da alle Parabeln horizontale Achsenrichtung haben und (wegen der Berührung des durch die z-Achse gehenden isotropen Ebenenpaares) im Grundriss den Ursprung O zum Brennpunkt haben. Gehen wir daher zu Zylinderkoordinaten φ, r, z über, in welchen die Fläche (1) durch

$$x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi,\ z = \sqrt{2r} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} \tag{5}$$

beschrieben wird, so können wir eine Flächenparabel allgemein durch

$$r = \frac{2r_0}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{6}$$

ansetzen. Ihr Scheitel hat die Koordinaten

$$\varphi_0,\ r_0,\ z_0 = \sqrt{2r_0} \cdot \sin\frac{\varphi_0}{2}, \tag{7}$$

und für ihren Parameter findet man den Wert

$$p = 2r_0 + \cos^2\frac{\varphi_0}{2}. \tag{8}$$

Für eine durch $p = \text{const}$ definierte kinematische Erzeugung der Fläche Φ_I gelten dann im allgemeinen folgende Feststellungen: Die Bahn des Parabelscheitels (7) ist eine Kurve 8.Ordnung, die auf der Drehquadrik

$$4(x_0^2 + y_0^2) - (2p - 1)z_0^2 - 2(p - 1)x_0 = 0 \tag{9}$$

verläuft und sich im Grundriss auf die durch (8) erklärte Pascalschnecke abbildet. Die Grenze der von der bewegten Parabel überstrichenen Flächenzone

(Einhüllende der Parabellagen) ist eine rationale Kurve 4.Ordnung auf dem parabolischen Zylinder

$$(2p-1)z^2+2px=p(p-1) \tag{10}$$

und erscheint im Grundriss als Kegelschnitt

$$r(2p-1+\cos\varphi)=p(p-1) \tag{11}$$

mit den Brennpunkten $O(0,0)$ und $F'(-1/2,0)$. – Eine Sonderstellung kommt dem Parameterwert $p=1$ zu, weil für diesen die Zonengrenze verschwindet, sodass mit einer solchen Parabel die Fläche Φ_I in ihrer ganzen Ausdehnung erzeugt werden kann, und zwar auf zwei Arten, da das Parabelsystem in zwei bezüglich der xy – Ebene symmetrische Scharen zerfällt. Bei einer solchen Bewegung durchläuft der Parabelscheitel etwa die gespitzte Quartik $2r_0=z_0=\sin^2(\varphi_0/2)$, die Parabel gleitet dabei ständig durch den festen Flächenpunkt $F(-1/2,0,1)$, sodass ihre Ebene den aus F an Φ_I legbaren Berührungskegel 3.Klasse und 4.Ordnung umhüllt.

II.

Fragen wir nun nach der allgemeinsten Fläche mit ebenen Fallinien, die wie Φ_I zu einem *Schichtenplan aus konfokalen Parabeln* gehört, so können wir in Anlehnung an (4) vom Ansatz

$$x=v^2-u^2,\ y=2uv,\ z=z(u) \tag{12}$$

ausgehen, der die Parameterdarstellung einer Fläche gibt, deren *Schichtenlinien* $u=\text{const}$ Parabeln in der verlangten Grundrissanordnung sind. Die Parameterlinien $v=\text{const}$ bilden sich im Grundriss auf die Orthogonalparabeln des Schichtenplans ab, bedeuten also jedenfalls die *Fallinien* der Fläche. Sollen dieselben *eben* sein, so muss die aus den ersten drei Ableitungen von x, y, z nach u gebildete Determinante verschwinden. Dies führt auf die lineare Differentialgleichung $z'''=0$ mit der Lösung

$$z=au^2+bu+c, \tag{13}$$

wobei die additive Konstante c mit Rücksicht auf Verschiebungen in z-Richtung ohne weiteres unterdrückt werden darf, während die Koeffizienten a und b durch Wahl eines geeigneten Massstabs und Ausübung einer unwesentlichen affinen Streckung der z-Koordinaten noch passend normiert werden können.

Nehmen wir die Sonderfälle verschwindender Koeffizienten vorweg: Der Fall $a = 0$, $b \neq 0$ $(b^2 = 2)$ führt auf die bereits betrachtete *Eckhartsche Fläche* Φ_I, der Fall $b = 0$, $a \neq 0$ $(a = 2)$ hingegen auf einen sogenannten *Reyeschen Kegel 2. Grades*

$$y^2 = 2xz + z^2, \tag{14}$$

der die xy-Ebene längs der x-Achse berührt und eine Fokalgerade in der z-Achse hat; seine Fallinien sind Parabeln in den parallelen Ebenen $2x + z = \text{const}$.

Der allgemeine Fall, den wir durch die Festsetzung $a = 1$, $b = 2$ normieren wollen, führt auf eine *Fläche 4. Ordnung* Φ_{II}, wie man durch Elimination von u und v aus (12) und (13) leicht feststellt; die Flächengleichung kann etwa auf die nachstehende Form gebracht werden:

$$(y^2 - 4xz - 4z^2 - 8x)^2 = 64(x^2 + y^2)(z + 1). \tag{15}$$

Eine Vorstellung vom Aufbau der Fläche erhält man am besten durch die Betrachtung der Schichtenparabeln $u = \text{const}$, deren Brennpunkte der z-Achse angehören und deren Scheitel die in der Symmetrieebene $y = 0$ verlaufende Parabel $v = 0$ $(x = -u^2,\ z = u^2 + 2u)$ erfüllen (vgl. Abb. 2). Da diese Profilparabel die z-Achse im Ursprung berührt, tritt an dieser Stelle ein uniplanarer Knotenpunkt («Zwickpunkt») der Fläche auf, in welchem eine Doppellinie in Gestalt der x-Achse mündet. In jeder Schichtenebene $z = \text{const}$ befinden sich zwei Schichtenparabeln, die für $z = -1$ und $z = \infty$ zusammenrücken. Unsere Fläche wird mithin von der Ebene $z = -1$ und von der Fernebene längs je eines Kegelschnittes berührt, ebenso aber auch — wegen der Brennpunktslage der Schichten-

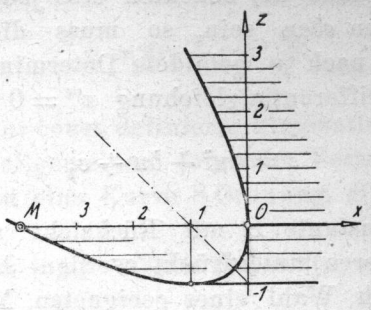

Abb. 2

parabeln — von den Minimalebenen $x \pm iy = 0$; deren Berührungslinien sind zwei durch $v \pm iu = 0$ gekennzeichnete konjugiert-imaginäre Parabeln. Aus der Existenz dieser vier singulären Tangentialebenen folgt bereits, dass es sich auch bei Φ_{II} um eine *Römerfläche* handelt. Diesmal sind die drei Doppelgeraden jedoch getrennt, allerdings ist nur die in die x-Achse fallende reell; ihr zweiter Treffpunkt mit der Profilparabel $v = 0$ (festgelegt durch $u = -2$) liefert das Tripelzentrum $M(-4, 0, 0)$ der Fläche, von wo auch die restlichen beiden Doppelgeraden in den Richtungen $-2 : \pm 2i : 1$ ausgehen.

Die *Fallparabeln* $v = \text{const}$ haben allesamt dieselbe Achsenrichtung $-1 : 0 : 1$ und verlaufen in den Ebenen

$$x + z = v^2 + v^{-1}y, \tag{16}$$

die den zur Richtung $-1 : 0 : 1$ parallelen *kubischen Berührungszylinder* Γ von Φ_{II} einhüllen. Die zur semikubischen Basisparabel

$$x = 3u^2,\ y = 2u^3,\ z = 0 \tag{17}$$

kongruente Schichtenlinie dieses Zylinders in der Ebene $z = -1$ ist, wie leicht einzusehen, die Evolute der entsprechenden Schichtenparabel $u = -1$ von Φ_{II}. Erwähnt sei noch, dass die Scheitelpunkte der Fallparabeln die Schichtenparabel $u = -1/2$ in der Höhe $z = -3/4$ erfüllen.

Abb. 3 zeigt eine anschauliche Ansicht des charakteristischen Teils der Fläche Φ_{II}.

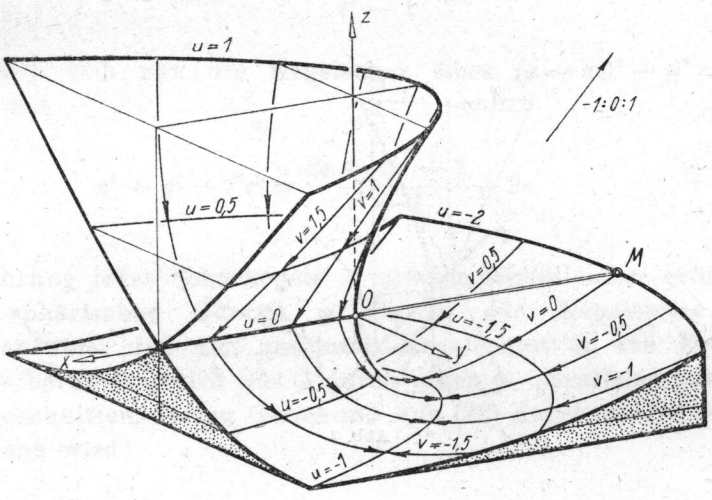

Abb. 3

III.

Wie in einer vorangegangenen Arbeit gezeigt wurde ([6]), können die *allgemeinsten Flächen mit ebenen Fallinien* mittels der folgenden Konstruktionsvorschrift gefunden werden: Man nehme eine beliebige *Torse* Γ an, zeichne auf ihr irgend ein einparametriges System von *Böschungslinien* mit verschiedenen Neigungen aus und bestimme die *Einhüllende* Φ der *Tangentenflächen* Δ dieser Böschungslinien. Die Fallinien der Fläche Φ verlaufen dann durchwegs in den Tangentialebenen der Torse Γ.

Lässt man insbesondere die Grundtorse Γ in eine eigentliche *Gerade* g ausarten, so schrumpfen die genannten Böschungslinien auf Punkte zusammen und die Fläche Φ erscheint dann als Einhüllende eines einparametrigen Systems von lotrecht orientierten *Drehkegeln* Δ, deren Spitzen auf g liegen. Die Kegelerzeugenden sind dabei die Falltangenten der Fläche Φ, sodass in der Tat jede Fallinie von Φ, weil ihre sämtlichen Tangenten die Gerade g treffen, in einer Ebene durch g verlaufen muss. Die durch g legbare Vertikalebene ist eine *Symmetrieebene* von Φ und die ihr angehörenden Erzeugendenpaare s, $\bar{s}$ der Kegel Δ sind durch eine involutorische *quadratische Strahlverwandtschaft* $\mathfrak{Q}$ miteinander verknüpft. Legt man die Kegelschar etwa durch die Hüllkurve m der Erzeugenden s fest, so tritt daneben noch die gleichberechtigte, im allgemeinen von m verschiedene Hüllkurve $\bar{m} = \mathfrak{Q}m$ der Erzeugenden $\bar{s}$ auf. Die einfachste Annahme, bei welcher die beiden Profilkurven m und $\bar{m}$ sich vereinigen, besteht darin, für $m = \bar{m}$ eine *Parabel* zu wählen, welche die Gerade g an einer Stelle M horizontal und an einer anderen Stelle N vertikal schneidet (Abb. 4); die einander auf g begegnenden Tangentenpaare s, $\bar{s}$ der Parabel entsprechen einander dann in einer projektiven Involution

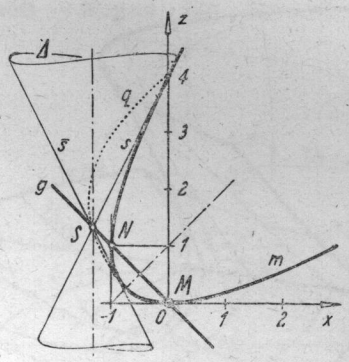

Abb. 4

([6]) W. WUNDERLICH: Flächen mit ebenen Fallinien. Mh. Math. 65 (1961), 291-300.

mit Tangenten in M und N als Doppelelementen, und ihre Richtungen liegen demnach tatsächlich spiegelbildlich zur Lotrechten und Waagrechten.

Diese Annahme, die gewissermassen als die denkbar einfachste (nichttriviale) anzusehen ist, soll nun näher untersucht werden. Der Fall einer waagrechten Achse g — die dann gleichzeitig die Hauptachse der Profilparabel $m = \bar{m}$ ist — führt auf die *Eckhartsche Fläche* Φ_I und kann als erledigt gelten (wenngleich sie eine neue einfache Erzeugung dieser Fläche liefert).

Der Fall einer schrägen Achse g soll durch affine Streckung in Lotrichtung gemäss Abb. 4 normiert werden: g steige unter 45° an und sei durch

$$x + z = 0, \quad y = 0 \tag{18}$$

festgelegt, die Profilparabel m durch

$$(x - z)^2 = 4z. \tag{19}$$

Entgegengesetzt geneigte Profiltangenten s, $\bar{s}$ werden dargestellt durch

$$x \pm tz + \frac{1}{1 \pm t} = 0 \tag{20}$$

und schneiden einander auf der Involutionsachse g im Punkt S mit den Koordinaten

$$x_0 = -z_0 = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad y_0 = 0. \tag{21}$$

Damit lässt sich nun die Kegelschar über $(x - x_0)^2 + y^2 = t^2(z - z_0)^2$ hinschreiben mit

$$x^2 + y^2 - t^2z^2 = \frac{2x + 2z + 1}{t^2 - 1} + 2z. \tag{22}$$

Die Berührung jedes Scharkegels Δ mit der Einhüllenden erfolgt jeweils längs einer sphärischen Quartik q, die in der Kegelspitze S einen Doppelpunkt aufweist und den absoluten Kegelschnitt in den Kreispunkten der xy-Ebene berührt; q wird aus Δ durch einen y-parallelen parabolischen Zylinder ausgeschnitten, dessen Gleichung aus (22) durch partielle Ableitung nach t gewonnen wird:

$$(t^2 - 1)^2z^2 = 2x + 2z + 1. \tag{23}$$

Elimination von t aus (22) und (23) führt dann auf die Gleichung der gesuchten Hüllfläche Φ_{III}:

$$(24) \qquad (x + y^2 - z^2)^2 = 4z[(x+z)^2 + y^2].$$

Es handelt sich also neuerlich um eine Fläche 4. Ordnung mit einem dreifachen Punkt im Koordinatenursprung M. Die von dort ausgehenden Schnittgeraden der drei Tangentialebenen $z=0$ und $x \pm iy + z = 0$, nämlich die Achse g (18) und die Minimalstrahlen $x \pm iy = z = 0$, gehören der Fläche als Doppelgeraden an, womit auch Φ_{III} als *Römerfläche* zu erkennen ist. Sie hängt im übrigen mit der Fläche Φ_{II} (15) durch die Affinität

$$(25) \qquad \bar{x} = -4x - 4,\ \bar{y} = 4y,\ \bar{z} = 2x + 2z$$

zusammen. — Die vier singulären Tangentialebenen der Steinerfläche Φ_{III} sind: Die Fernebene, die längs des Fernkreises mit dem Richtkegel $x^2 + y^2 = z^2$ berührt; die eigentliche Ebene $2x + 2z + 1 = 0$, die längs einer Parabel berührt; die beiden isotropen Ebenen $x \pm iy + 1 = 0$, die längs zweier konjugiert-imaginären parabolischen Kreise berühren. Diese Ebenen sind in der Kegelschar (22) für $t^2 = 0$ bzw. $t^2 = 1$ enthalten. Die sechs Zwickpunkte der Fläche sind: Der Fernpunkt $-1:0:1$ der Achse g, der Punkt $N(-1, 0, 1)$, die konjugiert-imaginären Punkte $(-1/2, \pm i/2, 0)$ und die absoluten Punkte der xy-Ebene.

Aus der letzten Bemerkung folgt, dass die *Schichtenlinien* der Fläche Φ_{III} rationale Quartiken mit absoluten Spitzen, also *Pascalschnecken* sind; deren eigentliche Doppelpunkte erfüllen die Achse g, ihre Mittelpunkte die z-Achse. Macht man für die Pascalschnecke mit der Kote z unter Berücksichtigung ihrer bekannten Abmessungen (Doppelpunktsabszisse $-z$, Scheitelabszissen $z \pm 2\sqrt{z}$) den naheliegenden Ansatz einer Polargleichung

$$(26) \qquad r = 2z \cdot \cos v \pm 2\sqrt{z},$$

wobei der Doppelpunkt als Nullpunkt dient, und führt man den Höhenparameter $u = \sqrt{z}$ ein, so gelangt man zur nachstehenden Parameterdarstellung von Φ_{III}:

$$(27) \qquad \begin{aligned} x &= u^2 \cdot \cos 2v + 2u \cdot \cos v, \\ y &= u^2 \cdot \sin 2v + 2u \cdot \sin v, \\ z &= u^2. \end{aligned}$$

Die *Fallinien* verlaufen auf Grund der Entstehung unserer Fläche in den Ebenen durch die Achse g und sind infolgedessen mit den Parameterlinien $v = \text{const}$ identisch. Es handelt sich um *Parabeln* von 45° Achsenneigung, die sämtlich durch das Tripelzentrum M gehen, welches im übrigen einen Nabelpunkt des reellen Flächenmantels darstellt. Die Scheitelpunkte der Fallparabeln erfüllen eine durch $2u + \cos v = 0$ gekennzeichnete rationale sphärische Quartik mit einem isolierten Doppelpunkt in $(-1/2, 0, 1/2)$.

Abb. 5 zeigt eine axonometrische Darstellung der Fläche Φ_{III}, welche — so wie Φ_I und auch Φ_{II} — gleichfalls auf ∞^1 Arten als *Bewegfläche* von einer starren *Parabel* erzeugt werden kann.

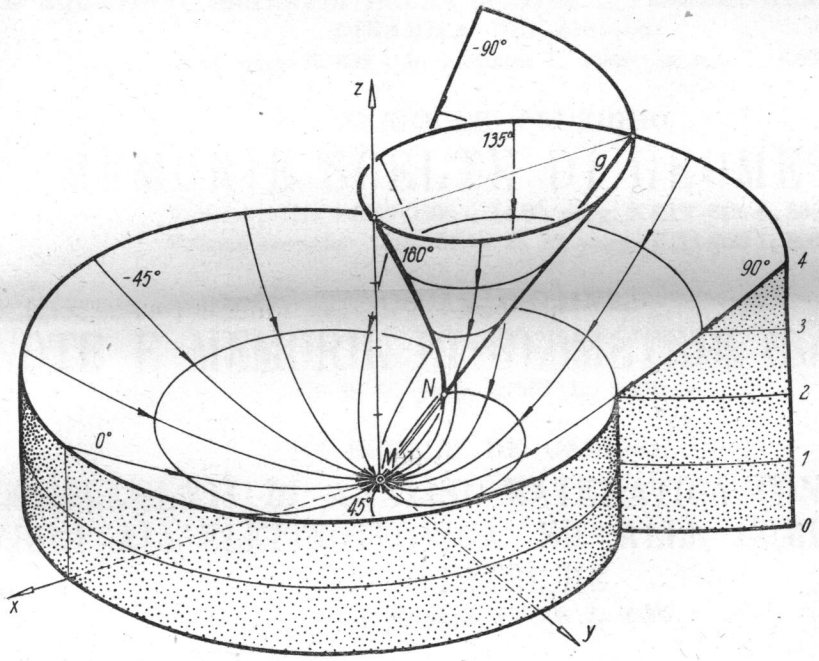

Abb. 5

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass Φ_{III} eine funktionentheoretische «*Betragsfläche*» ist, nämlich das über der GAUSSschen ζ-Ebene errichtete Relief des absoluten Betrags der durch

$$\zeta = \omega + 2\omega^{1/2} \tag{28}$$

erklärten komplexen analytischen Funktion $\omega = f(\zeta)$. Schreiben wir nämlich die komplexen Veränderlichen in der Form $\zeta = x + iy$ und $\omega^{1/2} = u \cdot e^{iv}$,

dann gilt $x + iy = u^2 \cdot e^{2iv} + 2u \cdot e^{iv}$, und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil gewinnt man für die Diagrammfläche von $|\omega| = u^2$ genau die Darstellung (27). — Durch die logarithmische Abbildung $z^* = \log z$ geht übrigens die Betragsfläche $z = |\omega|$ von $f(\zeta)$ in die Potentialfläche $z^* = \Re(\omega^*)$ der Funktion $\omega^* = \log f(\zeta)$ über.

Die Frage nach allen Potential- bzw. Betragsflächen, die sich durch ebene Fallinien auszeichnen (wie beispielsweise Φ_I bzw. Φ_{III}) ist unschwer zu beantworten, würde jedoch aus dem hier gesteckten Rahmen herausführen und soll daher an anderer Stelle behandelt werden, ebenso die Bestimmung aller Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien.