

Die in den Sitzungsberichten Abt. I und Abt. II der math.-nat. Klasse der Österr. Akad. d. Wiss. erscheinenden Abhandlungen werden auch einzeln abgegeben. Sie können durch jede Buchhandlung oder direkt durch die Auslieferungsstelle der Österreichischen Akademie der Wissenschaften (Wien I, Singerstraße 12) bezogen werden.

Nachfolgende Abhandlungen aus den Fächern **Mathematik** und **Technik** sind erschienen:

1950 (S II a, Bd. 159):

Hohenberg F.: Zur Geometrie des Funkmeßbildes (mit 2 Abbildungen). 14 Seiten. S 12.40
 Jarosch W.: Matrizenzähler, 14 Seiten. S 5.20
 Schmid H.: Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung von Luftbildern und Zugrundelegung eines Orientierungspunktgitters (mit 13 Abbildungen). 31 Seiten. S 28.40

1951 (S II a, Bd. 160):

Hohenberg F.: Komplexe Erweiterung der gewöhnlichen Schraubenlinie (mit 1 Abbildung). 14 Seiten. S 7.80
 Huber A.: Das Verhalten der Integrale der Gibbs-Duhem-Margules'schen Gleichung für binäre Gemische in der Umgebung ihrer festen singulären Stellen (mit 3 Abbildungen). 16 Seiten. S 10.50
 Krames J.: Zur Geometrie der gegenseitigen Einnäherung von Luftaufnahmen (mit 4 Abbildungen). 15 Seiten. S 7.—
 Parkus H.: Wärmespannungen in Rotationschalen mit drehsymmetrischer Temperaturverteilung (mit 1 Abbildung). 13 Seiten. S 7.50
 Ströher W.: Zur projektiven Differentialgeometrie ebener Kurven, 8 Seiten. S 6.—
 Wunderlich W.: Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung (mit 8 Abbildungen). 38 Seiten. S 16.—

1952 (S II a, Bd. 161):

Federhofer K.: Über die Eigenschwingungen der Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke, 16 Seiten. S 14.80

1953 (S II a, Bd. 162):

Nöbauer W.: Über Gruppen von Restklassen nach Restpolynomidealen. S 19.40
 Vietoris L.: Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung einer Gleichung $y' = f(x, y)$. S 8.80
 Vietoris L.: Der Richtungsfehler einer durch das Adamssche Interpolationsverfahren gewonnenen Näherungslösung eines Systems von Gleichungen $y' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m)$. S 8.80
 Wunderlich W.: Über die ebenen Loxodromen (mit 2 Abbildungen). S 6.30

1954 (S II, Bd. 163):

Federhofer K.: Die durch pulsierende Axialkräfte gedrückte Kreiszylinderschale. S 13.40
 Raher W. und Selig F.: Die Verwendung der Motorsymbolik in der theoretischen Mechanik S 17.80

1955 (S II a, Bd. 164):

Federhofer K.: Zur Kinematik des Schleifkurvengetriebes (mit 5 Abbildungen). S 11.—
 Ströher W.: Über einen gewissen Typus von Differentialinvarianten der projektiven und der apollonischen Gruppe der Ebene. S 28.40
 Wunderlich W.: Doppelloxodromen mit schneidendem Achsenpaar (mit 6 Abbildungen). S 22.50

Betrags- und Potentialflächen mit ebenen Fallinien

Von

Walter Wunderlich (Wien)

(Mit 5 Abbildungen)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 13. April 1961)

Im Verlaufe systematischer Untersuchungen über *Flächen mit ebenen Fallinien*¹⁻³ stieß der Verfasser wiederholt auf bemerkenswerte Beispiele solcher Flächen, die eine funktionentheoretische Deutung als *Betragsflächen* oder *Potentialflächen* gestatten. In der vorliegenden Abhandlung werden jetzt *alle* Betrag- und Potentialflächen bestimmt, die sich durch ebene Fallinien auszeichnen. Die Arbeit mag als Beitrag zu der seinerzeit von E. Ullrich angebahnten Forschungsrichtung angesehen werden, die das Interesse auf die geometrischen Eigenschaften der in der Theorie der komplexen Funktionen gebräuchlichen Diagrammflächen zu lenken versuchte^{4, 5}.

¹ W. Wunderlich: Flächen mit ebenen Fallinien. Monatsh. Math. 65 (1961), 291—300.

² W. Wunderlich: Römerflächen mit ebenen Fallinien. Annali di Mat. (im Druck).

³ W. Wunderlich: Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien. J. reine angew. Math. 208 (1961), 204—220.

⁴ E. Ullrich: Betragsflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten. Math. Z. 54 (1951), 297—328. In dieser Arbeit wird gezeigt, daß innerhalb einer sehr weiten Klasse analytischer Funktionen die Potenzfunktionen $\omega = (\alpha\zeta + \beta)^{\gamma}$ dadurch gekennzeichnet werden können, daß auf ihren Betragsflächen die Gaußsche Krümmung das Vorzeichen nicht wechselt.

⁵ E. Ullrich: Geometrisches über Potenzbetragsflächen. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), 250—251. Hier werden die Schnittlinien der Betragsflächen zweier Potenzfunktionen mit derselben Basis und verschiedenen Exponenten betrachtet.

I.

§ 1. Sei $\omega = \omega(\zeta)$ eine komplexe analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $\zeta = x + iy$. Trägt man über jedem Punkt (x, y) der Gaußschen ζ -Ebene senkrecht den absoluten Betrag $|\omega| = u$ als Strecke auf, so gelangt man zur „Betragsfläche“ Ω der Funktion $\omega(\zeta)$. Wird die abhängige Veränderliche in der Form $\omega = ue^{iv}$ geschrieben, dann hat eine Parameterdarstellung der Fläche in dem kartesischen Normalkoordinatensystem $O(x, y, z)$ die Bauart

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = u. \quad (1)$$

Die Parameterlinien $u = \text{const}$ sind dabei die *Schichtenlinien* der Fläche (wobei die ζ -Ebene stets horizontal vorzustellen ist). Die andere Parameterlinienschar $v = \text{const}$ besteht hingegen aus den *Falllinien* der Fläche, weil sie die erste zu einem *Orthogonalsystem* ergänzt. Dies liegt daran, daß der verwendete Koordinatenraster der Fläche Ω im Grundriß (Normalriß auf die ζ -Ebene) als Orthogonalmnetz erscheint: Dieses ebene Orthogonalmnetz — in Hinkunft kurz als „*Schichtenplan*“ der Fläche bezeichnet — geht nämlich aus dem orthogonalen Polarkoordinatennetz $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ der ω -Ebene durch die konforme Abbildung $\omega \rightarrow \zeta$ hervor⁶.

Für die folgenden Überlegungen ist es zweckmäßig, in der Grundebene von den kartesischen Koordinaten x, y zu den „isotropen“ oder „*Minimalkoordinaten*“ $\zeta = x + iy$, $\bar{\zeta} = x - iy$ überzugehen. Da die Transformationsdeterminante einen nichtverschwindenden Wert hat ($\Delta = -2i$),

Unbemerkt blieb dabei die wesentlich gruppentheoretische Bedeutung dieser als „*Spiressen*“ bezeichneten Kurven: Jede Potenzbetragsfläche gestattet nämlich eine kontinuierliche zweigliedrige Gruppe projektiver Transformationen — was unmittelbar das einheitliche Vorzeichen der Flächenkrümmung erklärt —, und die ∞^2 auf einer solchen Fläche verlaufenden Spiressen sind nichts anderes als Bahnkurven der ∞^1 eingliedrigen Untergruppen, also (metrisch spezielle) *W-Kurven* im Sinne von F. Klein und S. Lie. Die Potenzbetragsflächen sind daher für $\text{Im } \gamma \neq 0$ *Spiressen* (sonst Drehflächen) und unter den genannten Spiressen finden sich insbesondere ihre Schichtenlinien (logarithmische Spiralen bzw. Kreise), Falllinien, Schmieglinien usw.

⁶ Schöne Ansichten von Betragsflächen, sowie Schichtenpläne enthält das bekannte Tabellenwerk von Jahnke-Emde-Lösch: *Tafeln höherer Funktionen* (Stuttgart, 6. Aufl. 1960).

liegt hier eine lineare, zwar komplexe, jedoch durchaus reguläre Koordinatentransformation vor. Freilich wird man sich jetzt die betrachteten geometrischen Gebilde ins Komplexe erweitert denken müssen, denn ein beliebig zusammengestelltes komplexes Wertepaar $\zeta, \bar{\zeta}$ wird im allgemeinen einen imaginären Punkt der Grundebene festlegen, und einen reellen dann und nur dann, wenn ζ und $\bar{\zeta}$ konjugiert-komplex sind.

Mit Benützung der *Umkehrfunktion* $\zeta = \zeta(\omega)$ und der konjugierten Abhängigkeit $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{\omega})$ schreibt sich die Parameterdarstellung (1) der Betragsfläche Ω in den neuen Koordinaten:

$$\zeta = \zeta(u e^{iv}), \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}(u e^{-iv}), \quad z = u. \quad (2)$$

Sollen nun die *Falllinien* $v = \text{const}$ eben sein, dann muß eine lineare Identität

$$A\zeta + B\bar{\zeta} + Cz + D = 0 \quad (3)$$

bestehen, deren Koeffizienten nur von v abhängen. Differenzieren wir diese Identität dreimal nach u , so erhalten wir nach Elimination von A, B, C, D eine notwendige Bedingung in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} \zeta & \bar{\zeta} & z & 1 \\ \zeta' e^{iv} & \bar{\zeta}' e^{-iv} & 1 & 0 \\ \zeta'' e^{2iv} & \bar{\zeta}'' e^{-2iv} & 0 & 0 \\ \zeta''' e^{3iv} & \bar{\zeta}''' e^{-3iv} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \zeta''' \bar{\zeta}'' e^{iv} - \zeta'' \bar{\zeta}''' e^{-iv} = 0, \quad (4)$$

wobei die Akzente Ableitungen nach ω bzw. $\bar{\omega}$ bedeuten. Diese Bedingung, die auch als Ausdruck für das Verschwinden der Falllinientorsion aufgefaßt werden mag, kann nach Multiplikation mit u umgeformt werden zu

$$\frac{\zeta'''}{\zeta''} \omega = \frac{\bar{\zeta}'''}{\bar{\zeta}''} \bar{\omega}, \quad (5)$$

und besagt jetzt für reelle Flächenpunkte (u, v reell), daß die analytische Funktion $\omega \zeta''' / \zeta''$ nur reelle Werte annimmt. Hieraus folgt aber — etwa auf Grund der Cauchy-Riemannschen Gleichungen —, daß sie überhaupt *konstant* ist. Damit hat man für die Funktion $\zeta(\omega)$ die gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$\omega \zeta''' - c \zeta'' = 0 \quad (c \text{ reell}), \quad (6)$$

die sich explizit integrieren läßt. Man findet

$$\begin{aligned}\zeta &= c_1 \omega^{c+2} + c_2 \omega + c_3 \text{ für } c \neq -1, -2; \\ \zeta &= c_1 \omega \log \omega + c_2 \omega + c_3 \text{ für } c = -1; \\ \zeta &= c_1 \log \omega + c_2 \omega + c_3 \text{ für } c = -2.\end{aligned}\quad (7a, b, c)$$

Satz I: Die durch (7a-c) definierten analytischen Funktionen $\omega(\zeta)$ sind die einzigen, deren Betragflächen lauter ebene Fallinien ($\arg \omega = \text{const}$) besitzen.

Was die Gestalt dieser Betragflächen anlangt, bedenke man zunächst, daß die Multiplikation von ω mit einer komplexen Konstanten bloß eine proportionale Änderung der Schichtenhöhen und eine Umnormierung der Fallinien bewirkt, während durch diese Maßnahme den ersten beiden Koeffizienten in (7) jeder gewünschte Verhältniswert erteilt werden kann. Andererseits zieht eine Multiplikation von ζ mit einer Konstanten nur eine Ähnlichkeitstransformation der ζ -Ebene nach sich, und die Unterdrückung der additiven Konstante bedeutet bloß eine Verschiebung der ζ -Ebene. Nach allem genügt es daher, sich bei der gestaltlichen Diskussion der in Rede stehenden Betragflächen auf die folgenden Normalformen zu beschränken:

$$\begin{aligned}\zeta &= \omega^m - m\omega, \quad m \text{ reell, } \neq 0, \neq 1; \\ \zeta &= \omega \cdot \log \omega; \\ \zeta &= \omega + \log \omega.\end{aligned}\quad (8a, b, c)$$

Hierbei wurden die uninteressanten Grenzfälle $\zeta = \omega^m$ und $\zeta = \log \omega$ nicht eigens angeführt, da die zugehörigen Funktionen $\omega(\zeta)$ nur triviale Betragflächen mit ebenen Fallinien liefern, nämlich Drehflächen bzw. einen logarithmischen Zylinder.

§ 2. Die zu (8a) gehörige Betragfläche Ω_m der Funktion $\omega(\zeta)$ besitzt die kartesische Parametendarstellung

$$x = u^m \cos mv - mu \cos v, \quad y = u^m \sin mv - mu \sin v, \quad z = u, \quad (9)$$

oder bei Verwendung der Minimalkoordinaten:

$$\zeta = u^m e^{imv} - mu e^{iv}, \quad \bar{\zeta} = u^m e^{-imv} - mu e^{-iv}, \quad z = u. \quad (10)$$

Wie die komplexe Schreibung unmittelbar erkennen läßt, sind die Schichtenlinien $u = \text{const}$ durchwegs Radlinien, und zwar Epitrochoiden für $m > 0$ und Hypotrochoiden für $m < 0$. Die zur Kote u gehörige Schichtenlinie kann kinematisch durch ein Paar rotierender Stäbe erzeugt werden: Der erste Stab MA hat die Länge $|mu|$ und dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $+1$ um den Fixpunkt M auf der z -Achse; der zweite Stab AB von der Länge u^m ist mit dem ersten in A gelenkig verbunden und dreht sich mit der (absoluten) Winkelgeschwindigkeit m um A , wobei sein Endpunkt B die Schichtenlinie beschreibt (vgl. Abb. 1). Die zu $u = 1$ gehörige Radlinie ist eine gespitze; sie trennt den Bereich der gestreckten Trochoiden von jenem der verschlungenen, unter welchen sich insbesondere die durch $u^{m-1} = |m|$ gekennzeichnete „Rosenkurve“ ($\overline{MA} = \overline{AB}$) findet.

Die Fallinien $v = \text{const}$ gestatten die vektorielle Parametendarstellung

$$\begin{aligned}\xi &= u \cdot a + u^m \cdot b \quad \text{mit } a = (-m \cos v, -m \sin v, 1) \\ &\quad \text{und } b = (\cos mv, \sin mv, 0),\end{aligned}\quad (11)$$

sind also untereinander affine, durchwegs ebene W -Kurven, und zwar (i. a. „höhere“) Parabeln für $m > 0$ und (i. a. „höhere“) Hyperbeln für $m < 0$. Die zum Argument v gehörige Fallinie verläuft in der von a und b aufgespannten Ebene

$$x \sin mv - y \sin mv + mz \sin (m-1)v = 0. \quad (12)$$

Die ∞^1 solcherart auftretenden Ebenen bestimmen einen vom Ursprung O ausstrahlenden Hüllkegel Δ_m , für welchen sich unter Heranziehung der durch partielle Ableitung von (12) nach v gewonnenen Gleichung

$$x \cos mv + y \sin mv + (m-1)z \cos (m-1)v = 0 \quad (13)$$

die Darstellung

$$\begin{aligned}x:y:z &= \cos (2m-1)v + (1-2m) \cos v : \\ &\quad : \sin (2m-1)v + (1-2m) \sin v : 2\end{aligned}\quad (14)$$

ergibt. Die Schichtenlinien dieses Kegels sind mithin im allgemeinen gespitze Radlinien, und zwar Epitrochoiden für $m > 1/2$, Hypotrochoiden

für $m < \frac{1}{2}$. Die Schichtenlinie in der Höhe u ist nebenbei, wie man leicht erkennt, die Hüllbahn des oben genannten (genügend verlängerten) Stabes AB .

Im *Schichtenplan* der Fläche Ω_m erfüllen übrigens, wie hervor-
gehoben zu werden verdient, die Schichten- und Falliniengrundrisse
je ein *konfokales System* mit gemeinsamen Brennpunkten. Sucht man
nämlich auf Grund der komplexen Darstellung (10) die durch $\partial\zeta/\partial v = 0$
bzw. $\partial\zeta/\partial u = 0$ gekennzeichneten Stellen mit isotropen Fortschreit-
richtungen auf, so gelangt man in beiden Fällen zur Bedingung

$$\zeta' = m(\omega^{m-1} - 1) = 0, \quad (15)$$

also auf

$$\omega_k = e^{2k\pi i/(m-1)} \text{ und } \zeta_k = (1-m)\omega_k, \quad k \text{ ganz.} \quad (16)$$

Sämtliche Kurven des Schichtenplans besitzen mithin die gemeinsamen
Minimaltangenten $\zeta = \zeta_k$ und analog $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_k$, sind also im Sinne von
J. Plücker konfokal⁷. Unter den im gegenseitigen Schnitt der Mini-
maltangenten festgelegten Brennpunkten ($\zeta_k, \bar{\zeta}_k$) sind die zu $k = l$
gehörigen reell: Sie fallen in die *Verzweigungsstellen* der Funktion $\omega(\zeta)$.
Die an diesen Stellen errichteten Senkrechten zur ζ -Ebene können als
„*Fokalachsen*“ der Fläche angesprochen werden, weil die von ihnen
ausgehenden Minimalebenenpaare die Fläche längs (natürlich imagi-
nären) Linien berühren. Diese Fokalachsen tragen auch die Spitzen der
Schichtenzykloide $u = 1$, welche „*Zwickpunkte*“ (uniplanare Doppel-
punkte) von Ω_m abgeben (vgl. Abb. 1). In diesen Punkten enden echte
Selbstschnittkurven der Fläche; auf der Fortsetzung jenseits der Zwick-
punkte sind die isolierten Doppelpunkte der gestreckten Schichten-
trochoiden angeordnet⁸.

Für rationale Werte von $m (\neq 0, \neq 1)$ ergeben sich *algebraische*

⁷ Konfokale Trochoidenscharen samt ihren Orthogonaltrajektorien betrachtet
erstmal E. Francoise: Propriété delle epicicloid ed ipocicloid. Atti Ist. Veneto 1
(1872), 430–436. Sie treten auch auf bei H. Amstein: Note sur les épicycloïdes
et les hypocycloïdes, envisagés au point de vue de la représentation conforme.
Bull. Soc. Vaudoise sci. nat. 28 (1892), 67–84.

⁸ Mit den isolierten Doppelpunkten der Radlinien befaßte sich speziell
F. Hohenberg: Die isolierten Punkte der gestreckten Zykliden und Trochoiden.
Monatsh. Math. 55 (1951), 242–249.

Flächen Ω_m , sonst transzendente. Zu reziproken Indizes gehören
ähnliche Schichtenpläne, die Flächen Ω_m und $\Omega_{1/m}$ unterscheiden sich
aber durch die Höhenverteilung der Schichtenlinien und auch die Lage
ihrer Fallinien, die zwar von gleicher Art sind, deren Ebenen jedoch
grundverschiedene Hüllkegel Δ_m bzw. $\Delta_{1/m}$ besitzen. — Abschließend
mögen die Betragsflächen für einige spezielle Werte von m kurz charak-
terisiert werden.

$m = -1$. Die Schichtenlinien der Fläche Ω_{-1} sind *Ellipsen*, die
Fallinien hingegen konzentrische *Hyperbeln* in den Tangentialebenen
eines Kegels Δ_{-1} mit Astroiden als Schichtenlinien. Die Hyperbel-
asymptoten — festgelegt durch die im Ursprung angebrachten Vek-
toren a und b aus (11) — erfüllen einen Drehkegel und ein Strahlbüschel.
Der Schichtenplan besteht aus einer konfokalen Kegelschnittschar mit
den reellen Brennpunkten $(\pm 2, 0)$. Elimination der Parameter aus (9)
führt auf die kartesische Flächengleichung

$$\frac{x^2}{(z+x^{-1})^2} + \frac{y^2}{(z-x^{-1})^2} = 1, \quad (17)$$

aus welcher zu entnehmen ist, daß Ω_{-1} eine *Fläche 8. Ordnung* ist⁹.

$m = \frac{1}{2}$. Die Schichtenlinien der Fläche $\Omega_{1/2}$ sind *Pascalschnecken*,
die Fallinien gewöhnliche *Parabeln* in den Ebenen eines *Büschels* $\Delta_{1/2}$
mit der Achse $x:y:z = 1:0:2$, die gleichzeitig eine reelle Doppelgerade
der Fläche ist. Bei näherem Zusehen erweist sich $\Omega_{1/2}$ als eine *Steinersche*
Römerfläche 4. Ordnung, welche ihren dreifachen Punkt im Ursprung
hat, wo der reelle Flächenmantel überdies einen Nabelpunkt aufweist¹⁰.
Zum gleichen Schichtenplan (abgesehen vom Maßstab) gehört auch die
Fläche Ω_2 , die jedoch von 8. Ordnung ist und deren Fallparabeln in
den Tangentialebenen eines Kegels Δ_2 mit einer zweispitzigen Epi-
zykloide („Nephroide“) als Basis verlaufen.

$m = -\frac{1}{2}$. Die Schichtenlinien der Fläche $\Omega_{-1/2}$ sind *Hypotro-
choiden* jener Familie, der auch der „Steinersche Dreispitz“ ($u = 1$)
angehört. Die Fallinien sind ebene *kubische Hyperbeln* in den Tangential-
ebenen eines Kegels $\Delta_{-1/2}$, der wieder eine Steinerzykloide als Basis

⁹ Eine dazu äquivalente Fläche findet man samt einer Aufbauskizze bereits
a. a. O.³, Abschn. II, 3.

¹⁰ Eine ausführliche Diskussion nebst Bildern findet man a. a. O.², Abschn. III.

hat. Eine anschauliche Vorstellung von dieser *Fläche 9. Ordnung* vermittelt Abb. 1. Die Fläche besitzt auf der z -Achse einen triplanaren dreifachen Punkt $T(0, 0, 4^{1/3})$, durch welchen drei ebene kubische Doppelkurven laufen.

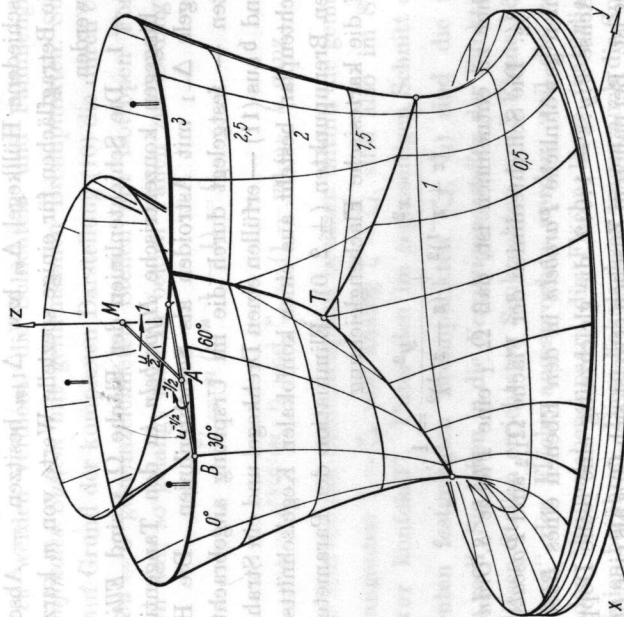


Abb. 1. Axonometrische Darstellung der Betragfläche $\Omega_{-1/2}$.

§ 3. Für die zu (8b) gehörige Betragfläche Ω_1 von $\omega(\zeta)$ — die eine Lücke in der Reihe der Ω_m ausfüllt — findet man über die komplexe Darstellung

$$\zeta = u e^{iv} (\log u + iv), \quad \bar{\zeta} = u e^{-iv} (\log u - iv), \quad z = u \quad (18)$$

die kartesische:

$$x = u (\log u \cos v - v \sin v), \quad y = u (\log u \sin v + v \cos v), \quad z = u. \quad (19)$$

Die Schichtenlinien $u = \text{const}$ sind *allgemeine Kreisevolventen*; wie aus der komplexen Darstellung unmittelbar zu ersehen ist, entsteht ja die zur Kote u gehörige Schichtenlinie als Bahn eines Punktes, der mit

konstanter Geschwindigkeit u auf einer Geraden läuft, während diese im Abstände $u \log u$ mit der Winkelgeschwindigkeit 1 um die z -Achse kreist. Für $u = e^{-1}$ liegt eine gewöhnliche, gespitzte Kreisevolvente

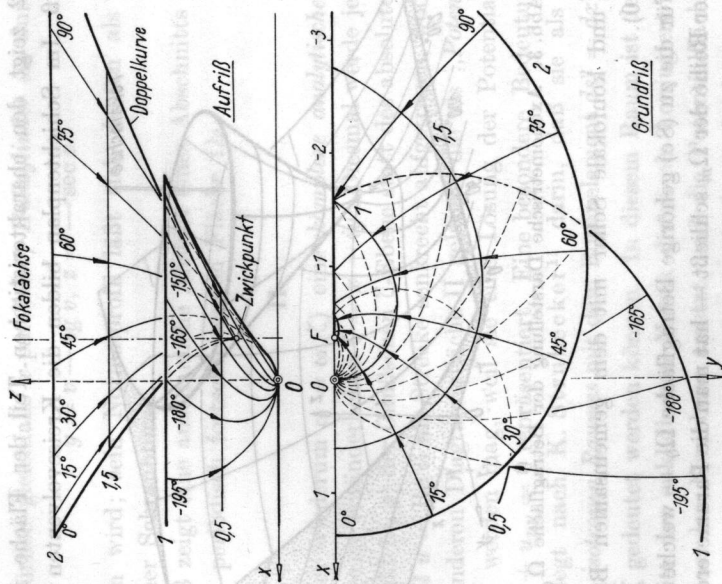


Abb. 2. Schichtenplan und Frontalansicht der Betragfläche Ω_1 .

vor, für $u = 1$ eine Archimedische Spirale. Die Fläche Ω_1 ist demnach *transzendent*.

Die Falllinien $v = \text{const}$ werden in vektorieller Schreibung dargestellt durch

$$\vec{x} = u \vec{a} + u \log u \cdot \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{a} (-v \sin v, v \cos v, 1) \quad (20)$$

$$\quad \quad \quad \text{und} \quad \vec{b} (\cos v, \sin v, 0),$$

sind also transzendente ebene *W-Kurven* von einem Typus, der kol-linear zur logarithmischen Linie (oder Exponentialkurve) ist. Ihre Trägerebenen

erzeugen einen vom Ursprung 0 ausstrahlenden *Hüllkegel* Δ_1 mit gewöhnlichen Kreisevolventen als Schichtenlinien.

Abb. 2 zeigt den charakteristischen Teil der Fläche in Grund- und Aufriß. Im Schichtenplan bilden die Kreisevolventen eine kon-

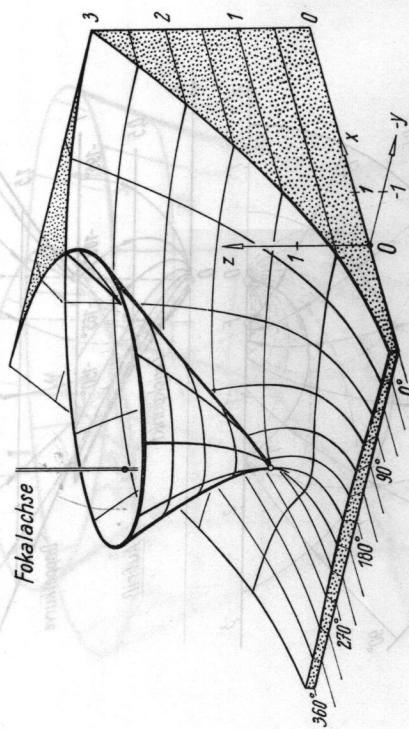


Abb. 2. Axonometrische Darstellung der Betragfläche Ω_0 .

zentrische und konfokale Schar mit dem gemeinsamen Brennpunkt $F(-1/e, 0)$.

§ 4. Für die zu (8c) gehörige Betragfläche Ω_0 — welche die zweite Lücke in der Reihe der Ω_m schließt — hat man die Parametendarstellungen

$$\zeta = u e^{iv} + \log u + iv, \quad \bar{\zeta} = u e^{-iv} + \log u - iv, \quad z = u \quad (22)$$

oder

$$x = u \cos v + \log u, \quad y = u \sin v + v, \quad z = u. \quad (23)$$

Die Schichtenlinien $u = \text{const}$ sind *gewöhnliche Trochoiden*, darunter für $u = 1$ die gemeine Zykloide. Im Schichtenplan bilden sie ein konfokales System mit den gemeinschaftlichen Brennpunkten $\zeta_k = -1 + (2k + 1)\pi i$, k ganz. Die Falllinien $v = \text{const}$ schreiben sich vektoriell

$$\mathbf{r} - \mathbf{c} = u \mathbf{a} + \log u \cdot \mathbf{b} \quad (24)$$

mit $\mathbf{a}(\cos v, \sin v, 1)$, $\mathbf{b}(1, 0, 0)$, $\mathbf{c}(0, v, 0)$,

sind also affine *Exponentialkurven*. Sie verlaufen in durchwegs x -parallelen Ebenen

$$y - z \sin v = v, \quad (25)$$

deren (natürlich gleichfalls x -paralleler) *Hüllzylinder* Δ_0 durch

$$y = v - \text{tg } v, \quad z = -\sec v \quad (26)$$

beschrieben wird; sein Normalprofil läßt sich deuten als Meridianschnitt einer Schraubtorse.

Abb. 3 zeigt eine anschauliche Ansicht eines Abschnitts der transzendenten, periodisch fortschreitenden Fläche Ω_0 .

II.

§ 5. Sei wiederum $\omega = \omega(\zeta)$ eine *komplexe analytische Funktion* der komplexen Veränderlichen $\zeta = x + iy$. Diesmal werde jedoch über jedem Punkt (x, y) der Gaußschen ζ -Ebene statt des absoluten Betrags der *Realteil* $u = \text{Re } \omega$ als Strecke senkrecht aufgetragen, wodurch man zu einer anderen Diagrammfläche Π gelangt, die als „*Potentialfläche*“ bezeichnet werden mag, weil sie eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$ repräsentiert. Eine besondere Bedeutung solcher Flächen liegt nach K. Strubecker¹¹ darin, daß sie als *Minimalflächen des isotropen Raumes* mit dem Bogenelement $ds^2 = dx^2 + dy^2 = d\zeta \cdot d\bar{\zeta}$ gedeutet werden können. In diesem Raum ist der absolute Kegelschnitt der euklidischen Metrik durch ein konjugiert-imaginäres Geradenpaar der Fernebene ersetzt, und die Potentialflächen weisen dementsprechend noch zahlreiche Analogien mit den gewöhnlichen Minimalflächen auf; so sind sie beispielsweise als *Schiefflächen* durch „*Minimalkurven*“ erzeugbar, das sind im isotropen Raum ebene Kurven in „*vollisotropen*“ Ebenen $\zeta = \text{const}$ bzw. $\bar{\zeta} = \text{const}$ ¹².

Schreiben wir diesmal — im Gegensatz zu I — $\omega = u + iv$, so erhalten wir mittels der Umkehrfunktion $\zeta = \zeta(\omega)$ und der konjugierten

¹¹ K. Strubecker: Differentialgeometrie des isotropen Raumes III. Math. Z. 48 (1942), 369–427. Ferner: Über Potentialflächen. Arch. Math. 5 (1954), 32–38.

¹² Dies ist aus der Darstellung (27) zu ersehen, wenn man sie in der Form $\zeta = \zeta(\omega)$, $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\bar{\omega})$, $z = \frac{1}{2}(\omega + \bar{\omega})$ schreibt und ω , $\bar{\omega}$ als komplexe Flächenparameter auffaßt.

ten Beziehung $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(\omega)$ die folgende Parameterdarstellung der Potentialfläche Π (in Minimalkoordinaten):

$$\bar{\zeta} = \zeta(u + iv), \quad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}(u - iv), \quad z = u. \quad (27)$$

Die Parameterlinien $u = \text{const}$ sind wieder die *Schichtenlinien* der Fläche, die Parameterlinien $v = \text{const}$ die *Falllinien*. Das Koordinatennetz auf der Fläche ist nämlich ein orthogonales, da sein Grundriß (der „Schichtenplan“) als konformes Abbild des kartesischen Koordinatennetzes der ω -Ebene orthogonal ist¹³.

Eine Verbindung zwischen den Betrag- und den Potentialflächen kann durch die *logarithmische Abbildung*

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad z^* = \log z \quad (28)$$

hergestellt werden. Durch diese Punkttransformation wird bei verändertem Schichtenplan — es wird ja nur eine neue Höhenverteilung der Schichtenlinien vorgenommen — aus der Betragfläche der Funktion $\omega = f(\zeta)$ jene Potentialfläche, die den Realteil der Funktion $\omega^* = \log f(\zeta)$ repräsentiert. Den Schiebungen im Raum $\mathfrak{R}^*$ entsprechen im übrigen gewisse Affinitäten im Raum $\mathfrak{R}$.

Die Forderung nach *ebenen Falllinien* der durch (27) dargestellten Potentialfläche Π läuft nun wieder auf das Verschwinden einer zu (4) analogen Determinante

$$\begin{vmatrix} \zeta & \bar{\zeta} & z & 1 \\ \zeta' & \bar{\zeta}' & 1 & 0 \\ \zeta'' & \bar{\zeta}'' & 0 & 0 \\ \zeta''' & \bar{\zeta}''' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \zeta''' \bar{\zeta}'' - \zeta'' \bar{\zeta}''' = 0 \quad (29)$$

¹³ Ein einfaches Beispiel für eine Potentialfläche ist die von E. Müller in anderem Zusammenhang studierte *kubische Fläche* $(x^2 + y^2)z = x$, die das Relief des Realteils von $\omega = 1/\zeta$ darstellt; vgl.: Die achsiale Inversion, Jber. DMV 25 (1916), 209–251, insb. 224. Die Schichtenlinien sind Kreise, die Falllinien Raumkurven 3. Ordnung („aufrechte kubische Kreise“), der Schichtenplan besteht aus zwei orthogonalen parabolischen Kreisbüscheln. Als Schiebfläche kann die Fläche durch Verschiebung einer (imaginären) gleichseitigen Hyperbel längs einer anderen erzeugt werden ($\omega = \text{const}$ längs $\bar{\omega} = \text{const}$ oder umgekehrt). — Die Müllersche Fläche geht durch logarithmische Abbildung aus der Betragfläche von $\omega = \exp(1/\zeta)$ hervor, dargestellt bei F. Emde: Tafeln elementarer Funktionen (Leipzig 1940), S. 95.

hinaus, was die Bedingung

$$\frac{\zeta'''}{\zeta''} = \frac{\bar{\zeta}'''}{\bar{\zeta}''} = c \quad (30)$$

mit einer reellen Konstanten c ergibt. Durch Integration folgt dann

$$\begin{aligned} \zeta &= c_1 e^{c\omega} + c_2 \omega + c_3 \text{ für } c \neq 0; \\ \zeta &= c_1 \omega^2 + c_2 \omega + c_3 \text{ für } c = 0 \end{aligned} \quad (31 \text{ a, b})$$

Satz II: Die durch (31a,b) definierten analytischen Funktionen $\omega(\zeta)$ sind die einzigen, deren Realteilrelief lauter ebene Falllinien (Im $\omega = \text{const}$) besitzt.

Vor der näheren Untersuchung dieser Potentialflächen wird man wieder gewisse Normierungen vornehmen, die nur unwesentliche Gestaltsänderungen bewirken (Ähnlichkeitstransformationen und lineare Änderungen des Höhenmaßstabs). Es genügt dann — von trivialen Grenzfällen abgesehen —, die nachstehenden *Normalformen* zu betrachten:

$$\begin{aligned} \zeta &= e^{\omega} + \omega; \\ \zeta &= \omega^2. \end{aligned} \quad (32 \text{ a, b})$$

§ 6. Die zu (32a) gehörige, den Realteil von ω in Abhängigkeit von ζ repräsentierende Potentialfläche Π_1 hat die Parameterdarstellung

$$\zeta = e^{u+iv} + u + iv, \quad \bar{\zeta} = e^{u-iv} + u - iv, \quad z = u, \quad (33)$$

oder, in kartesischen Koordinaten,

$$x = e^u \cos v + u, \quad y = e^u \sin v + v, \quad z = u. \quad (34)$$

Π_1 hängt mit der in § 4 betrachteten Betragfläche Ω_0 durch die erwähnte logarithmische Transformation (28) zusammen, besitzt demnach denselben Schichtenplan, wenn man von der Bezifferung der Höhenlinien absieht. Die Schichtenlinien $u = \text{const}$ sind somit wieder *gewöhnliche Trochoiden* (darunter für $u = 0$ die gemeine Zykloide), aber auch die Falllinien $v = \text{const}$ erweisen sich neuerlich als *Exponentiallinien*, wie aus der Darstellung

$$\xi - c = e^u a + u b \quad (35)$$

mit $a (\cos v, \sin v, 0)$, $b (1, 0, 1)$, $c (0, v, 0)$

hervorgeht. Daß die Flächen Ω_0 und Π_1 trotzdem deutliche Unterschiede aufweisen, lehrt ein Vergleich der Abbildungen 3 und 4.

Insbesondere umhüllen die die Falllinien tragenden Ebenen

$$(x - z) \sin v = (y - v) \cos v \quad (36)$$

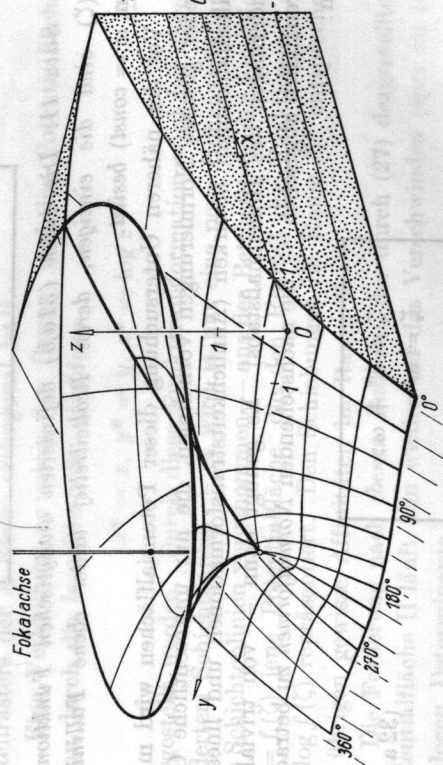


Abb. 4. Axonometrische Darstellung der Potentialfläche Π_1 .

jetzt einen Zylinder mit der Erzeugendenrichtung $b (1, 0, 1)$, dessen Basis die *gemeine Zykloide*

$$x = -\cos^2 v, \quad y = v - \sin v \cos v, \quad z = 0 \quad (37)$$

§ 7. Für die zu (32b) gehörige Potentialfläche Π_0 hat man die Parameterdarstellungen

$$\xi = (u + iw)^2, \quad \bar{\xi} = (u - iw)^2, \quad z = u \quad (38)$$

oder

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u. \quad (39)$$

Hier liegt im Gegensatz zur transzendenten Potentialfläche Π_1 eine

algebraische vor, und zwar die wohlbekannte *Eckhartsche Fläche 4. Ordnung*¹⁴

$$y^2 = 4z^2(z^2 - x), \quad (40)$$

die einen interessanten Grenzfall einer *Steinerschen Römerfläche* darstellt¹⁵. Sowohl die Schichtenlinien als auch die Falllinien sind *Parabeln*,

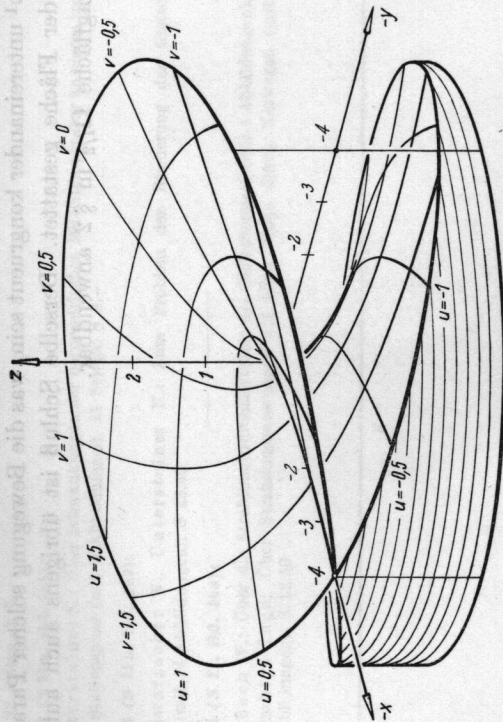


Abb. 5. Axonometrische Darstellung der Potentialfläche Π_0 .

die sich im Schichtenplan auf eine *konfokale Schar* abbilden. Die Ebenen der Fallparabeln erfüllen das *Büschel* $y/z = \text{const}$ (vgl. Abb. 5).

Eine eingehende Diskussion dieser in vieler Hinsicht bemerkenswerten Fläche findet man a. a. O.³, wo u. a. auf die kontinuierliche Gruppe projektiver Automorphismen hingewiesen wurde: Π_0 gestattet offenbar die ∞^1 Affinitäten $x' = t^2 x$, $y' = t^2 y$, $z' = tz$ mit parabolischen Bahnkurven. Interessant ist ferner, daß sich die Fläche — als Minimal-

¹⁴ L. Eckhart: Über Flächen vierter Ordnung, deren Falllinien Kegelschnitte sind. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien 131 (1922), 417–427. — Diese Arbeit gab den ersten Anstoß zu den vorliegenden Untersuchungen des Verfassers über Flächen mit ebenen Falllinien.

¹⁵ Es handelt sich um das duale Seitenstück zu der in Fußnote 13 erwähnten Müllerschen Fläche 3. Ordnung.

