

Sonderabdruck aus 66. Band, 1962, 3. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von E. Hlawka und N. Hofreiter

Springer-Verlag in Wien Alle Rechte vorbehalten

Über ein abwickelbares Möbiusband

Von Prof. Dr. Paul R. Kunen

W. Wunderlich, Wien

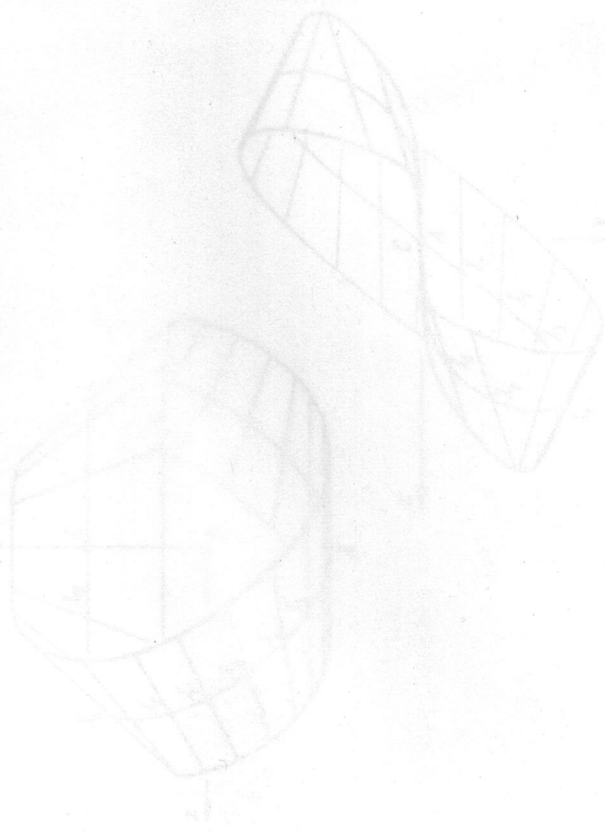
(Eingegangen am 1. April 1961)

1. Einleitung

Die Veranschaulichung einer einzigen flächenhaften Figur, die ein Möbiusband ist, kann dabei die Bandfläche als die rechteckige Fläche betrachten, die durch die Identifizierung der beiden gegenüberliegenden Seiten entsteht. Wenn man sich dabei eine ebene Fläche vorstellt, auf der die linke, rechteckige Deckung befindet, so wird die rechteckige Fläche in der Mitte durch eine Linie geteilt, wobei je zwei gegenüberliegende Ecken mit Kreuzeichen versehen werden. Diese Kreuzeichen sind die Punkte, an denen das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur wird.

Im Hinblick auf die rein topologische Bedeutung des Möbiusbandes ist die Abbildung des Möbiusbandes auf eine rechteckige Fläche, die durch die Identifizierung der beiden gegenüberliegenden Seiten entsteht, eine Abbildung, die die Möbiustransformation darstellt. Man kann sich das Möbiusband als eine rechteckige Fläche vorstellen, die durch die Identifizierung der beiden gegenüberliegenden Seiten entsteht. Diese Identifizierung ist die Möbiustransformation, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht.

Die Möbiustransformation ist eine Abbildung, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht. Diese Abbildung ist die Möbiustransformation, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht.



Die Möbiustransformation ist eine Abbildung, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht. Diese Abbildung ist die Möbiustransformation, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht.

Die Möbiustransformation ist eine Abbildung, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht. Diese Abbildung ist die Möbiustransformation, die das Möbiusband zu einer einzigen flächenhaften Figur macht.

speziellen *kubischen Regelfläche*, die von verschiedenen Autoren betrachtet wurde². In projektiver Verallgemeinerung gilt mithin, daß längs jeder auf einer allgemeinen Strahlfläche 3. Grades verlaufenden Ellipse ein einseitiger Flächenstreifen vom Charakter des Möbiusschen Bandes vorliegt.

Der Gedanke, zu einem *abwickelbaren Modell* des Möbiusbandes etwa dadurch zu gelangen, daß man die einer kubischen Regelfläche längs eines Kegelschnittes k angeschriebene *Torse* 3. Klasse betrachtet, führt aus folgendem Grunde zu keinem befriedigenden Ziel: Die Erzeugenden der Torse sind die zu den Tangenten von k konjugierten Flächentangenten; in jenem Punkt T von k , in welchem die Kegelschnittebene die Fläche berührt, ist die Tangente von k aber Schmiegtangente, fällt also mit ihrer konjugierten zusammen, und hier geht die Gratlinie der Torse berührend an k heran. Diese störende Singularität in T läßt sich nun durch noch so schmale Abgrenzung des Streifens nicht ausschalten, und aus demselben Grunde scheidet auch jede andere ebene Kurve k als Mittellinie eines abwickelbaren Möbiusbandes aus, selbst wenn man auf ihren geodätischen Charakter verzichtet. Da die Ebene von k unter den Tangentialebenen der Torse vorkommen muß, stellt k einen Tangentialschnitt der Torse dar und wird daher von der Gratlinie berührt.

Diese Umstände mögen zu gelegentlichen Zweifeln an der theoretischen Existenz abwickelbarer Möbiusbänder beigetragen haben, wie sie unter anderem von keinem Geringeren als *H. A. Schwarz* geäußert worden sein sollen. Zur Behebung solcher Zweifel gab *M. Sadovsky* ein einfaches elementargeometrisches Bandmodell an, das sich aus drei zylindrischen und drei ebenen Abschnitten zusammensetzt³.

² *H. Maschke*: Note on the unilateral surface of Moebius. Trans. Amer. Math. Soc. 1 (1900), 39. — *G. Scheffers*: Einführung in die Theorie der Flächen (Leipzig 2. Aufl. 1913), 41—43. — *H. Weyl*: Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913), 26. — *J. Krames*: Die Regelfläche dritter Ordnung, deren Striktionslinie eine Ellipse ist. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 127 (1918), 563—584. Hier wird die merkwürdige und kennzeichnende Tatsache festgestellt, daß sich die Striktionslinie, die bei kubischen Strahlflächen im allgemeinen von 8. Ordnung ist, im vorliegenden Sonderfall durch Abspaltung von Minimalerzeugenden auf eine Ellipse reduziert. — *J. Klíma*: O zborcené ploše, jejíž část je topologicky ekvivalentní s Möbiovým listem. Čas. mat. fys. 65 (1936), 211—216.

³ *M. Sadovsky*: Ein elementarer Beweis für die Existenz eines abwickelbaren Möbiusschen Bandes und Zurückführung des geometrischen Problems auf ein Variationsproblem. Sitzgsber. Preuss. Akad. Wiss. 22 (1930), 412—415.

Über ein abwickelbares Möbiusband

Von

W. Wunderlich, Wien

Herrn Prof. Dr. Paul Funk zum 75. Geburtstag gewidmet

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 1. August 1961)

I. Einleitung

Zur Veranschaulichung einer einseitigen Flächenzone hat *F. A. Möbius* ein inzwischen klassisch gewordenes Bandmodell beschrieben, das durch Zusammenheften der Schmalseiten eines längeren rechteckigen Papierstreifens entsteht, wobei je zwei diagonal gegenüberliegende Ecken zur Deckung gelangen¹. Wegen des praktisch undehnbaren Materials ergibt sich dabei eine *abwickelbare Fläche*, auf der die längere, ursprünglich gerade Mittellinie des Rechtecks eine *geschlossene geodätische Linie* m darstellt. Umgekehrt kann daher die Bandfläche als die *rektifizierende Torse* der Raumkurve m angesehen werden, also als die Einhüllende der zu den Schmiegebenen normalen Tangentialebenen von m .

Im Hinblick auf die rein topologische Bedeutung des Modells ist die Abwickelbarkeit des Bandes im Grunde belanglos und es fehlt daher nicht an einfachen analytischen Repräsentanten *nichtabwickelbarer Möbiusbänder*. Eine naheliegende elementargeometrische Erzeugung eines solchen Möbiusbandes ist beispielsweise die folgende: Man nehme einen Kreis, der sich um eine seiner Ebene angehörende, ihn jedoch nicht treffende Achse dreht; ein Durchmesser, der die Kreisfläche gleichzeitig mit der halben Winkelgeschwindigkeit überstreicht, erzeugt dann eine innerhalb eines Ringtorus verlaufende, von einer rationalen Raumkurve 6. Ordnung berandete Zone einer windschiefen, metrisch

¹ *F. A. Möbius*: Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. 17 (1865), 31—68. Gesammelte Werke, Bd. II (Leipzig 1886), 484.

Derartige Zweifel muten allerdings etwas sonderbar an, wenn man das Möbiussche Bandmodell tatsächlich anfertigt, da dies bei hinreichendem Schlankheitsgrad des Rechteckstreifens — etwa $< 1/5$ — ganz zwanglos gelingt. Der genaue Wert der Schlankheitschranke ist noch nicht bekannt. Bei genügend steifem Material stellt sich im übrigen eine wohldefinierte *stabile Gleichgewichtsform* ein (Abb. 1), die von der

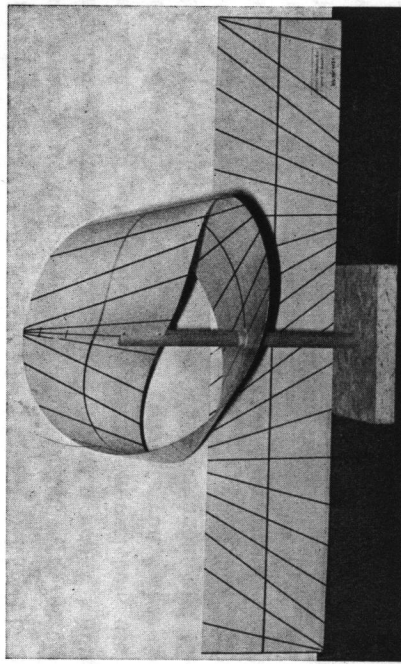


Abb. 1. Gleichgewichtsform des Möbiusschen Bandes

Bandbreite nur schwach abzuhängen scheint. Um die Ermittlung dieser Gleichgewichtsform und der auftretenden inneren Spannungen bemühte sich ebenfalls *M. Sadowsky*⁴, ohne allerdings zu einer Endlösung dieser sehr schwierigen Aufgabe zu gelangen. Ausgehend von der Tatsache, daß die beim Verbiegen eines dünnen ebenen elastischen Plättchens auf einen Drehzylinder zu leistende Formänderungsarbeit proportional zur Fläche F und zum Quadrat der Normalkrümmung $\bar{\kappa}$ ist⁵, folgt auf Grund des Prinzips vom *Minimum der Deformationsenergie*, daß die in Rede stehende Gleichgewichtsform eine Lösung des *Variationsproblems*

$$\int \bar{\kappa}^2 \cdot dF = \text{Min} \quad (1)$$

ist, wobei $\bar{\kappa}$ die Hauptnormalkrümmung senkrecht zur geradlinigen Erzeugenden (Biegelinie) der durch das Möbiusband dargestellten Torse bedeutet.

⁴ *M. Sadowsky*: Theorie der elastisch biegsamen undnehmbaren Bänder mit Anwendungen auf das Möbiussche Band. Verh. 3. Intern. Congr. Techn. Mechanik (Stockholm 1930), II, 444 — 451.

⁵ Der Proportionalitätsfaktor hat den Wert $El^3/24$, wobei E den Elastizitätsmodul und h die Dicke bezeichnet.

Bezeichnet s die längs der Mittellinie des Bandes gemessene Bogenlänge, $\vartheta = \vartheta(s)$ den Winkel der Biegelinie gegen die Mittellinie, und denkt man sich in dem verebneten Rechteckband — Länge L , Breite $2b$ — kartesische Koordinaten u, v in Längs- und Querrichtung eingeführt ($0 \leq u \leq L, -b \leq v \leq b$), dann wird der *Gratpunkt* der zur Bogenlänge s gehörigen Erzeugenden

$$u = s + v \cdot \text{ctg } \vartheta \quad (2)$$

durch

$$V = \frac{ds}{d\vartheta} \cdot \sin^2 \vartheta \quad (3)$$

festgelegt⁶. Werden die Veränderlichen s und v als Flächenkoordinaten verwendet, dann lautet das Flächenelement

$$dF = du \, dv = \frac{V - v}{V} \, ds \, dv. \quad (4)$$

Da längs einer Erzeugenden (2) die Hauptnormalkrümmung $\bar{\kappa}$ umgekehrt proportional zur Entfernung vom Gratpunkt ist, so hängt sie mit der Hauptnormalkrümmung $\bar{\kappa}_0 = \bar{\kappa}_0(s)$ an der Mittellinie $v = 0$ durch

$$\bar{\kappa} : \bar{\kappa}_0 = V : (V - v) \quad (5)$$

zusammen und das Integral (1) nimmt folgende Form an:

$$\int \bar{\kappa}^2 \, dF = \int \int \frac{\bar{\kappa}_0^2 V}{V - v} \, ds \, dv = \int_0^L \bar{\kappa}_0^2 V \log \frac{V + b}{V - b} \, ds. \quad (6)$$

Für ein „*unendlich schmales*“ Band ($b \ll L$) reduziert sich das Integral (6) auf $2b \int \bar{\kappa}_0^2 \, ds$. Berücksichtigt man noch, daß nach der Eulerschen Formel für parabolische Flächenpunkte die gewöhnliche *Krümmung* $\kappa = \kappa(s)$ der *Mittellinie* mit der Hauptnormalkrümmung $\bar{\kappa}_0$ durch $\kappa = \bar{\kappa}_0 \sin^2 \vartheta$ verknüpft ist und zieht man die aus der Theorie der Raumkurven geläufige Beziehung $\text{ctg } \vartheta = \tau/\kappa$ heran, wobei $\tau = \tau(s)$ die *Torsion der Mittellinie* bezeichnet, so gelangt man in Übereinstimmung mit *Sadowsky* zur Kennzeichnung der Mittellinie durch

$$M = \int_0^L \bar{\kappa}_0^2 \, ds = \int_0^L \frac{\kappa^2 \, ds}{\sin^4 \vartheta} = \int_0^L \frac{\kappa^2 (\kappa^2 + \tau^2)^2}{\kappa^2} \, ds = \text{Min}. \quad (7)$$

In *dimensionsloser Weise* erscheint demnach die Mittellinie des unendlich schmalen Möbiusbandes unter allen geschlossenen Raumkurven, bei

⁶ Im ganzen Intervall $0 \leq s \leq L$ muß $|V(s)| > b$ bleiben, um die Singularitäten darstellenden Gratpunkte außerhalb des Rechtecksbereiches zu halten.

welchen die Schmiegenebene nach einem vollen Umlauf eine halbe Umdrehung vollführt, durch einen Minimalwert der Größe LM charakterisiert. Das oben erwähnte zylindrische Bandmodell von *Sadowsky*³ liefert die Schranke

$$LM < 15\pi^2 = 148,04. \quad (8)$$

Durch zweckentsprechende Abänderung der von den drei Zylinderachsen gebildeten Winkel — bei *Sadowsky* durchwegs 60° — läßt sich übrigens die Schranke noch heruntersetzen auf

$$LM < 13,527\pi^2 = 133,51. \quad (9)$$

II. Nachbildung des Gleichgewichtsmodells

Die Lösung des Variationsproblems bleibt auch die vorliegende Note schuldig, doch soll eine *angenehmte Nachbildung* des in Abb. 1 wiedergegebenen Gleichgewichtsmodells durch eine *rational-algebraische Torse* versucht werden, womit gleichzeitig überhaupt das erste Beispiel eines *geschlossen analytischen, abwickelbaren Möbiusbandes* gegeben sein dürfte.

Nähere Betrachtung der Gleichgewichtsform läßt zunächst das Vorhandensein einer *Symmetrieachse* erkennen, die in dem Modell Abb. 1 durch den Trägerstab repräsentiert ist. Diese Achse trifft die

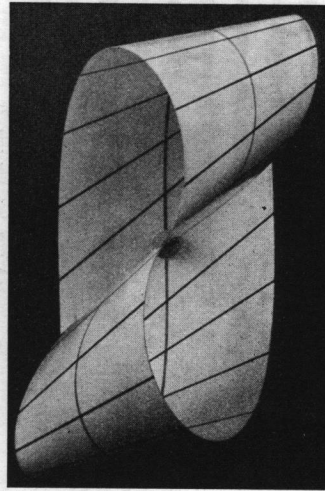


Abb. 2a. Ansicht von oben

Mittellinie m des Möbiusbandes in zwei Punkten A und C : In A ist sie Hauptnormale von m und Flächennormale des Bandes, in C ist sie hingegen Binormale von m und Erzeugende der Bandfläche. Wir machen die Symmetrieachse zur z -Achse des zu verwendenden kartesischen Koordinatensystems, dessen Ursprung O in die Mitte der Strecke AC fallen möge; die x -Achse legen wir parallel zur Tangente von m in C . In der Normalprojektion auf die xy -Ebene („Grundriß“) erscheint die Mittellinie m als *Achterschleife* mit einem Wendeknoten im Sym-

metriezentrum

metriezentrum (vgl. Abb. 2a), während die Normalprojektion auf die yz -Ebene („Aufriß“) die Gestalt eines reinen *Ovals* hat (vgl. Abb. 2b), das sich gut durch die *Ellipse*

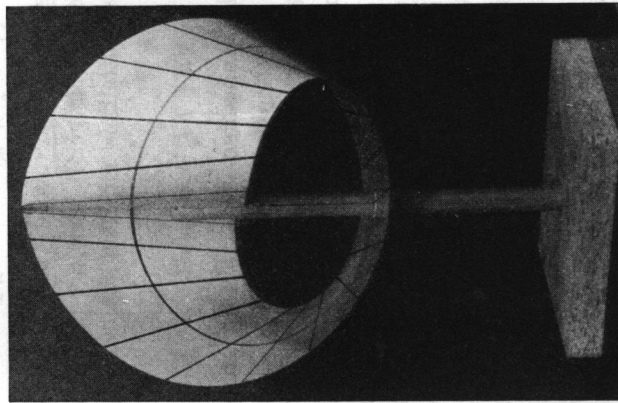


Abb. 2b. Ansicht von vorn

$$y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{mit} \quad c = \frac{4}{5} \quad (10)$$

approximieren läßt. In der Umgebung des Scheitelpunktes C wird die Potenzreihenentwicklung der Mittellinie m nach x daher folgendermaßen beginnen:

$$y = \lambda x^3 + \dots, \quad z = c \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} x^6 + \dots\right). \quad (11)$$

Wir ziehen nunmehr die *Zentralprojektion* der Mittellinie m aus ihrem singulären Punkt $C(0, 0, c)$ auf die xy -Ebene heran — wenn man will, die „stereographische Projektion“ des elliptischen Zylinders (10):

$$\xi = \frac{cx}{c-z}, \quad \eta = \frac{cy}{c-z}. \quad (12)$$

Der vom Projektionszentrum ausgehende Kurvenzweig wird dabei

in einen parabolischen Ast verwandelt, der zufolge (11) die asymptotische Entwicklung

$$\xi \approx \frac{2}{\lambda^2 x^5}, \quad \eta \approx \frac{2}{\lambda x^3} \quad (13)$$

haben wird. Dementsprechend (und die zentrische Symmetrie bezüglich des Ursprungs berücksichtigend) mag der Versuch gemacht werden, den Zentralriß der Mittellinie mit Benützung eines Parameters t anzusetzen durch

$$\xi = \alpha t + \beta t^3 + \gamma t^5, \quad \eta = \delta t + \varepsilon t^3. \quad (14)$$

Ausmessung der Aufnahme Abb. 2a führt zu folgenden Anhaltspunkten für eine passende Festsetzung der Koeffizienten: a) in dem zum Parameterwert $t = 0$ gehörigen Punkt $A(0, 0, -c)$ beträgt die Fortschreitrichtung etwa $x:y = 3:4$, was die Relation $\alpha:\delta = 3:4$ bedingt; b) weist man dem vorhandenen Kurvenpunkt $B(1, 1, 0)$ den Parameterwert $t = 1$ zu, so erhält man die Forderungen $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon = 1$; c) damit die Richtung $x:y = \xi:\eta$ von A aus monoton mit t wächst, wie dies anscheinend der Fall ist, muß $\beta\delta - \alpha\varepsilon \geq 0$ sein. Zusammen zieht dies folgende Bedingungen nach sich:

$$\alpha = \frac{3}{4}(1-\varepsilon) > 0, \quad \beta \geq \frac{3}{4}\varepsilon > 0, \quad 0 < \gamma \leq \frac{1}{4}, \quad \delta = 1 - \varepsilon > 0, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (15)$$

Eine brauchbare, aus einer Reihe von Versuchen gewonnene Annahme, die die Grundriß-Achterschleife gut annähert, lautet:

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{6}, \quad \delta = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3}. \quad (16)$$

Für das Folgende erweist es sich als zweckmäßig, mit

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 1 : x : y : z - c = \frac{1}{2} (1 + \eta^2) : \xi : \eta : -c \quad (17)$$

zu homogenen Koordinaten überzugehen. Die solcherart durch

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2} (1 + \delta^2 t^2 + 2 \delta \varepsilon t^4 + \varepsilon^2 t^6) \\ x_1 &= \alpha t + \beta t^3 + \gamma t^5 \\ x_2 &= \delta t + \varepsilon t^3 \\ x_3 &= -c \end{aligned} \quad (18)$$

beschriebene Mittellinie m des Möbiusbandes ist als rationale Raumkurve

6. Ordnung zu erkennen. Sie ist in Abb. 3 in Grund-, Auf- und Kreuzriß unter Verwendung der Annahme (16) dargestellt. Eine niedrigere Ordnung ist nach allem offenbar nicht möglich.

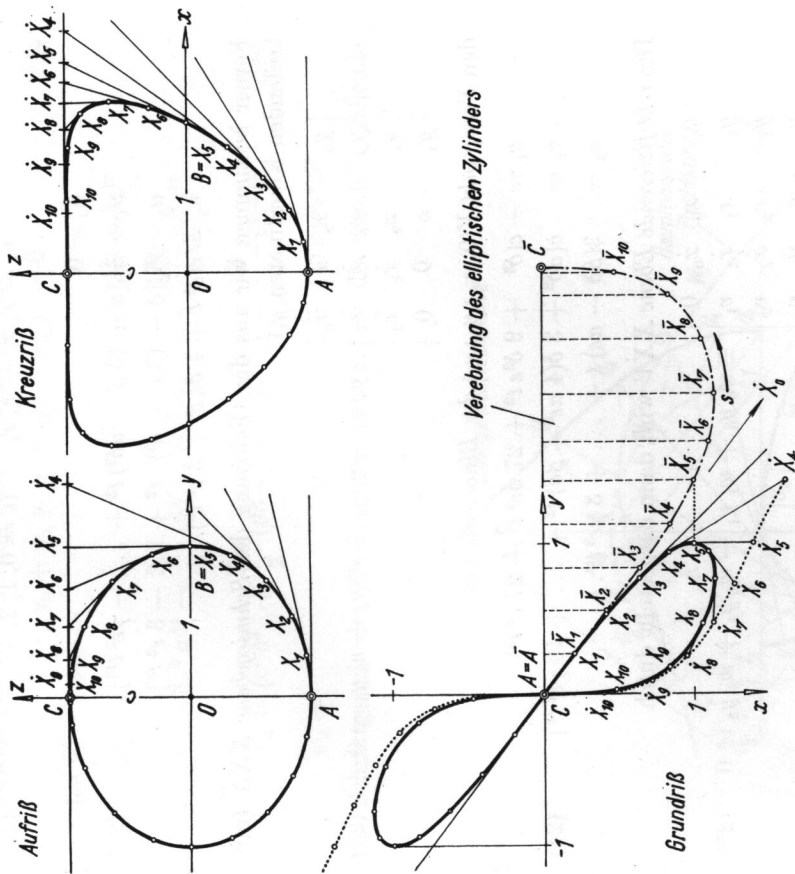


Abb. 3. Raumkurve 6. Ordnung als passende Mittellinie eines abwickelbaren Möbiusbandes

Die Bandfläche selbst ist nun als *relativisierende Torse der Mittellinie m* zu bestimmen. Hierzu benötigt man die ersten beiden Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \delta^2 t + 4 \delta \varepsilon t^3 + 3 \varepsilon^2 t^5 \\ \dot{x}_1 &= \alpha + 3 \beta t^2 + 5 \gamma t^4 \\ \dot{x}_2 &= \delta + 3 \varepsilon t^2 \\ \dot{x}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

und

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= 2 \delta + 12 \delta \varepsilon t^2 + 15 \varepsilon^2 t^4 \\ \ddot{x}_1 &= 6 \beta t + 20 \gamma t^3 \\ \ddot{x}_2 &= 6 \varepsilon t \\ \ddot{x}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Sie stellen einen zum Kurvenpunkt $X(x_i)$ gehörigen Punkt $\dot{X}(\dot{x}_i)$ der Tangente und einen Punkt $\ddot{X}(\ddot{x}_i)$ der Schmiegenebene von m dar. Wir ermitteln daraus vorerst den Fernpunkt $U(u_i)$ der Tangente gemäß

$$u_i = x_0 \dot{x}_i - \dot{x}_0 x_i \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (21)$$

zu

$$u_0 = 0 \quad (22)$$

$$u_1 = \frac{1}{2}[\alpha + (3\beta - \alpha\delta^2)t^2 + \dots - \gamma\varepsilon^2 t^{10}]$$

$$u_2 = \frac{1}{2}[\delta + (3\varepsilon - \delta^3)t^2 + \dots - 3\varepsilon^3 t^8]$$

$$u_3 = c(\delta^2 t + 4\delta\varepsilon t^3 + 3\varepsilon^2 t^5).$$

Ferner bestimmen wir aus der Gleichung der Schmiegenebene XXX (mit laufenden Koordinaten y_i)

$$\begin{vmatrix} y_0 & \ddot{x}_0 & \ddot{x}_0 \\ y_1 & \dot{x}_1 & \dot{x}_1 \\ y_2 & \dot{x}_2 & \dot{x}_2 \\ y_3 & -c & 0 \end{vmatrix} \equiv v_0 y_0 + v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0 \quad (23)$$

den Fernpunkt $V(0 : v_1 : v_2 : v_3)$ der Binormale mit

$$v_1 = -c(\delta^3 + 9\delta^2\varepsilon t^2 + 27\delta\varepsilon^2 t^4 + 27\varepsilon^3 t^6)$$

$$v_2 = c[\alpha\delta^3 + 3\delta(4\alpha\varepsilon - \beta\delta)t^2 + \dots + 15\gamma\varepsilon^2 t^8] \quad (24)$$

$$v_3 = 3(\beta\delta - \alpha\varepsilon)t + \dots + 3\gamma\varepsilon^2 t^{11}.$$

Die rektifizierende Ebene XXV wird dann dargestellt durch

$$\begin{vmatrix} y_0 & \dot{x}_0 & \dot{x}_0 \\ y_1 & x_1 & \dot{x}_1 \\ y_2 & x_2 & \dot{x}_2 \\ y_3 & -c & 0 \end{vmatrix} \equiv w_0 y_0 + w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 = 0 \quad (25)$$

mit

$$w_0 = -c^2\alpha^2(\alpha^2 + \delta^2) - \dots - 6\gamma^2\varepsilon^4 t^{18}$$

$$w_1 = v_2 u_3 - v_3 u_2 = [c^2\alpha\delta^4 - \frac{3\delta}{2}(\beta\delta - \alpha\varepsilon)]t + \dots + \frac{9}{2}\gamma\varepsilon^6 t^{19} \quad (26)$$

$$w_2 = v_3 u_1 - v_1 u_3 = [c^2\delta^5 + \frac{3\alpha}{2}(\beta\delta - \alpha\varepsilon)]t + \dots - \frac{3}{2}\gamma^2\varepsilon^5 t^{21}$$

$$w_3 = v_1 u_2 - v_2 u_1 = -\frac{c\delta^2}{2}(\alpha^2 + \delta^2) - \dots + \frac{15c}{2}\gamma^2\varepsilon^4 t^{18}.$$

Damit haben wir auch den Fernpunkt $W(0 : w_1 : w_2 : w_3)$ der Hauptnormale von m gewonnen.

Aus der rudimentären Darstellung (26) ist bereits abzulesen, daß die unser Möbiusband repräsentierende abwickelbare Fläche eine rationale Torse 21. Klasse ist. Um auch ihre Ordnung festzustellen, benötigen wir noch die durch Ableitung nach t erklärte Ebene

$$\dot{w}_0 y_0 + \dot{w}_1 y_1 + \dot{w}_2 y_2 + \dot{w}_3 y_3 = 0 \quad (27)$$

mit den Koeffizienten

$$\dot{w}_0 = \dots - 108\gamma^2\varepsilon^4 t^{17}$$

$$\dot{w}_1 = [c^2\alpha\delta^4 - \frac{3\delta}{2}(\beta\delta - \alpha\varepsilon)] + \dots + \frac{171}{2}\gamma\varepsilon^6 t^{18}$$

$$\dot{w}_2 = [c^2\delta^5 + \frac{3\alpha}{2}(\beta\delta - \alpha\varepsilon)] + \dots - \frac{63}{2}\gamma^2\varepsilon^5 t^{20} \quad (28)$$

$$\dot{w}_3 = \dots + 135c\gamma^2\varepsilon^4 t^{17}.$$

Die Schnittgerade der Ebenen (25) und (27) ist die durch X gehende

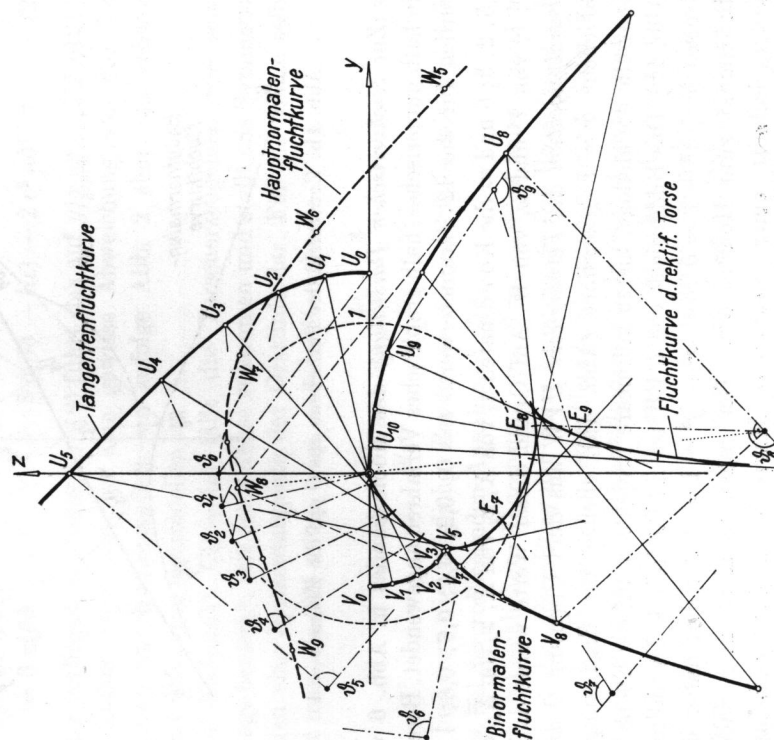


Abb. 4a. Zentralriß der Fernebene aus O auf die Ebene $x = 1$

Erzeugende der rektifizierenden Torse. Berechnet man nun die Plückerkoordinaten $q_{ik} = w_i \dot{w}_k - w_k \dot{w}_i$, so erkennt man aus q_{12} , daß unsere Torse die Ordnung 39 besitzt.

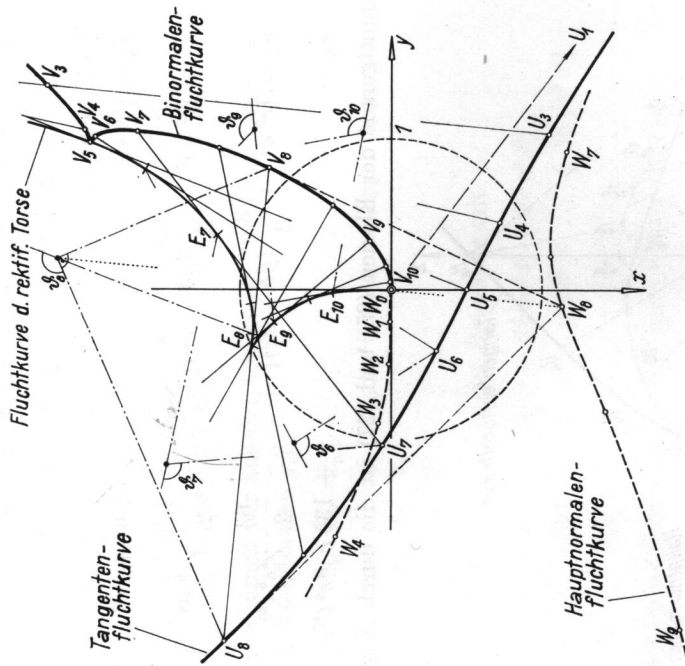


Abb. 4b. Zentralriß der Fernebene aus O auf die Ebene $z = 1$

Zur zeichnerischen Darstellung des Möbiusbandes in Abb. 6 wurde ein halb numerisches, halb graphisches Verfahren angewendet. Berechnet wurden für die 12 Parameterwerte $t = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1; 1,2; 1,5; 2; 3; 6$ und ∞ die Koordinaten x_i von X , $\dot{x}_i$ von $\dot{X}$, $\ddot{x}_i$ von $\ddot{X}$, u_i von U , v_i von V und w_i von W . Auf Grund dieser Werte wurde dann die Zentralprojektion des Ferndreiecks UVW aus dem Ursprung O auf die Bildebene $x = 1$ gezeichnet (Abb. 4a), ebenso zur Ergänzung und Kontrolle die analoge, hierzu kollineare Projektion auf die Ebene $z = 1$ (Abb. 4b). Das Bilddreieck von UVW ist ein Poldreieck des nullteiligen Kreises $y^2 + z^2 + 1 = 0$ bzw. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ und hat daher dessen Mittelpunkt zum Höhenschnitt. Der genannte Kreis mag dabei als Maßkegelschnitt einer elliptischen Metrik nach Cayley-Kleinschem Muster aufgefaßt werden. Die Ortslinien der Bildpunkte von U und V

(„Fluchtkurven“ der Tangentenfläche und Polartorse von m) besitzen die Bilder der Dreiecksseiten UW und VW zu Tangenten und das Bild der Seite UV als gemeinsame elliptische Normale. Sie bilden ein Paar von (polarreziproken) elliptischen Parallelkurven im Abstand $\pi/2$. Ihre gemeinsame elliptische Evolute — die Einhüllende der Bildseite UV — stellt die Fluchtkurve der Bandtorse dar und ist polarreziprok zur Ortslinie des Bildpunktes von W (Fluchtkurve der Hauptnormalenfläche)⁷. Der Berührungspunkt E von UV mit der Einhüllenden — im Bild als Pol der Tangente der letztgenannten Fluchtkurve kontrollierbar — gibt den Fernpunkt der zum Punkt X gehörigen Torsenerzeugenden an, die nunmehr in der gefundenen Richtung OE im Hauptbild Abb. 6 eingetragen werden kann.

Im Anfangspunkt $A(t=0)$ ergibt sich die Richtung der Torsenerzeugenden wegen $w_1 = w_2 = \dot{w}_0 = \dot{w}_3 = 0$ aus (25) und (27) mit

$$\begin{aligned} x : y : z &= y_1 : y_2 : y_3 = -\dot{w}_2 : \dot{w}_1 : 0 = \\ &= 3\alpha(\beta\delta - \alpha\epsilon) + 2c^2\delta^5 : 3\delta(\beta\delta - \alpha\epsilon) - 2c^2\alpha\delta^4 : 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Bei der vorliegenden Annahme (16) führt das auf $y/x = -372/6121 = -0,0608$. Dies bedeutet eine gewisse Abweichung von den Verhältnissen im Studienmodell, wo zufolge Abb. 2 eher eine schwach positive Richtung festzustellen ist.

Im Endpunkt $C(t=\infty)$ fällt die Torsenerzeugende, wie schon eingangs bemerkt, mit der z -Achse zusammen und stellt aus Symmetriegründen eine Spitzentangente der Gratlinie dar. Für die Spitze selbst findet man aus (25) mit $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ die Koordinate

$$z - c = \frac{y_3}{y_0} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_0}{w_3} = -\frac{4}{5c}. \quad (30)$$

Dies begrenzt die mögliche Bandbreite $2b$ jedenfalls mit $b \leq 4/5c$, das ist bei der vorliegenden Annahme $b \leq 1$.

Zur tatsächlichen Abgrenzung des Bandstreifens wurde zunächst in Abb. 5 die Abwicklung der Torse konstruiert. Die Bogenlänge s der Mittellinie m , die hierbei in eine Gerade übergeht, wurde aus der Ver-ebnung des elliptischen Trägerzylinders (10) in Abb. 3 entnommen, der Richtungswinkel $\vartheta = \angle UOE$ aus einer einfachen Umklappung in Abb. 4. Die in Abb. 5 im Abstände $\pm b$ zur geradegestreckten Mittellinie gezogenen Parallelen bilden den verebneten Rand des Möbiusbandes und

⁷ Die Ortslinien von U , V , W sind — auch im Zentralriß — zufolge (22), (24) und (26) rationale Kurven 10., 11., bzw. 21. Ordnung.

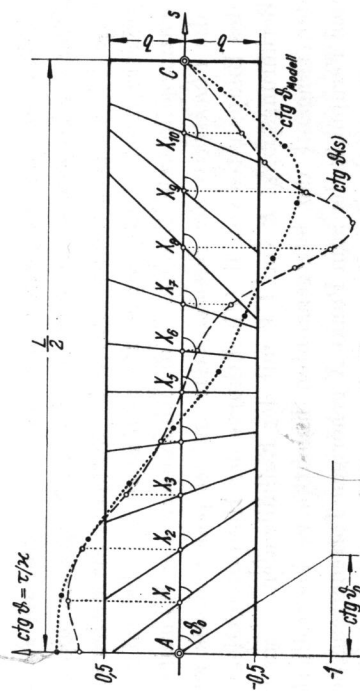


Abb. 5. Abwicklung des Bandstreifens

schneiden auf den Erzeugenden Strecken ab, die nach darstellend-geometrischen Regeln ins Hauptbild zu übertragen sind. Die so erhaltene

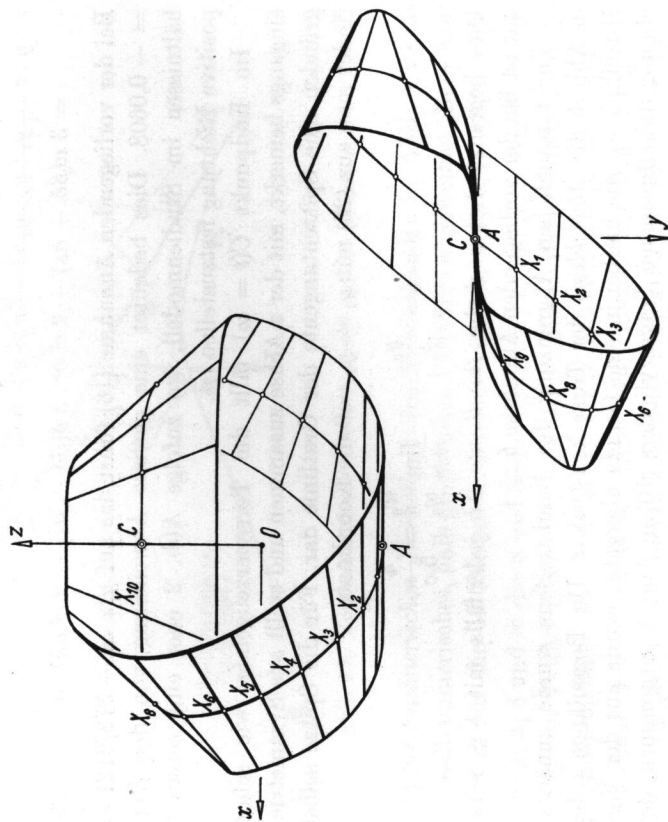


Abb. 6. Algebraisches Möbiusband in Grund- und Kreuzriß

Randkurve ist sicher wieder eine geschlossene, algebraische Geodätische der Bandtorse. — Zugrundegelegt wurde im vorliegenden Fall die offensichtlich zulässige Bandbreite $2b = 1$.

Der in Abb. 5 wiedergegebene Verlauf der Funktion $\vartheta(s)$ für die algebraische Torse (gestrichelt eingetragen) zeigt im Vergleich mit der am Studienmodell herrschenden Abhängigkeit (punktiert eingetragen)⁸ einen überraschend unruhigen Charakter, der auch die zulässige Bandbreite über die Grenze (30) hinaus einschränkt. Diesbezüglich erscheint die vorgenommene Nachbildung noch nicht ganz befriedigend.

Die rechnerische Erfassung der Abhängigkeit $\vartheta(s)$ hätte beträchtlichen Aufwand erfordert, weshalb vorläufig darauf verzichtet werden mußte. Die numerische Verfolgung des algebraischen Modells wäre jedoch nicht ohne Interesse, um beispielsweise eine Verbesserung der Schranke (9) zu erzielen. Die Annahme (16) entspricht allerdings nicht unmittelbar dem „unendlich schmalen“ Möbiusband, das besser durch ein hinreichend schmales Stahlband repräsentiert werden könnte und sicherlich etwas abgeänderte Koeffizienten verlangen würde.

⁸ Die auf dem Kartonmodell hervorgehobenen Torsenerzeugenden wurden als Eigenschattengrenzen im Lichtkegel eines Projektionsgerätes ermittelt.