[redacted]

Österreichische Akademie der Wissenschaften

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 25. Oktober 1962

Sonderabdruck aus dem Anzeiger der math.-naturw. Klasse der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1962, Nr. 12

(Seite 213 bis 219)

Das wirkl. Mitglied Josef Krames übersendet eine kurze Mitteilung, und zwar:

„Über eine spezielle Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Raumsystems." Von Prof. Dr. W. Wunderlich (Wien).

§ 1. Im Rahmen einer kürzlich durchgeführten Untersuchung der „axialen Ebenentransformationen" erwies sich ein eigenartiger zwangläufiger Bewegungsvorgang eines *ähnlich-veränderlichen Raumsystems* von Bedeutung [1]. Dieser Bewegungsvorgang kann dadurch gekennzeichnet werden, daß von zwei windschiefen, dem bewegten System angehörenden Geraden die eine festbleibt (in sich verschoben wird), während die andere ständig durch einen festen Punkt gleitet. Macht man die erste Gerade — im folgenden kurz die *Achse* der Bewegung genannt — zur z-Achse eines kartesischen Normalkoordinatensystems und nimmt man den Führungspunkt der zweiten Geraden in der xy-Ebene an, so lauten die *Bewegungsgleichungen* bei Benützung des Drehwinkels t als Zeitparameter:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos^2 t - y_0 \sin t \cos t, \\ y &= x_0 \sin t \cos t + y_0 \cos^2 t, \\ z &= z_0 \cos t + h \sin t. \end{aligned} \tag{1}$$

Vermöge (1) wird jedem Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ des zu bewegenden Systems Σ_0 („Ursoma") für jeden Augenblick t eine bestimmte Lage $P(x, y, z)$ zugewiesen. Das Ursoma Σ_0 und seine gemäß (1) bestimmte Lage Σ im Zeitpunkt $t \neq \pm\ \pi/2$ sind in der Tat *ähnlich* (Ähnlichkeitsfaktor $\cos t$). Die zu $t = 0$ gehörige Ausgangslage kann mit dem Ursoma identifiziert werden. Für $t = \pm\ \pi/2$ gelangt jeder Punkt P_0 in den einen oder anderen der beiden „*Hauptpunkte*" $H_{1,\,2}\,(0{,}0, \pm\, h)$.

Daß durch (1) die beiden (ausreichenden) Führungsbedingungen gewährleistet sind, ist für die erste Gerade unmittelbar zu sehen ($x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow x = y = 0$) und für die zweite unschwer aus der *Umkehrung*

$$\begin{aligned} x_0 &= x + y \operatorname{tg} t, \\ y_0 &= -x \operatorname{tg} t + y, \\ z_0 &= z \sec t - h \operatorname{tg} t \end{aligned} \tag{2}$$

abzulesen: Irgendein der „*Grundebene*" $z = 0$ angehörender Fixpunkt G ($x = a$, $y = b$, $z = 0$) wird im Verlauf der Bewegung von jedem der nachstehenden Punkte P_0

$$x_0 = a + bu,\ y_0 = b - au,\ z_0 = -hu \quad (u = \operatorname{tg} t) \tag{3}$$

erreicht, und diese Punkte erfüllen eine *Gerade* $g_0 \in \Sigma_0$. Dies besagt aber mit anderen Worten, daß die Systemgerade g_0 während der Bewegung ständig durch den Punkt G geführt wird[1].

§ 2. Mit Rücksicht auf die Wahlfreiheit für die Koordinaten a, b kann offensichtlich *jeder Punkt der Grundebene als Führungspunkt für eine entsprechende Systemgerade* dienen. Die vorhandene zweiparametrige Mannigfaltigkeit von Führungsgeraden g_0 erfüllt im bewegten System Σ_0 zufolge (3) ein elliptisches *Drehnetz* $\mathfrak{F}_0$ mit den isotropen Brennlinien $x_0 \pm i y_0 = 0$, $z_0 = \pm ih$ $(u = \mp i)$. Dieses Strahlnetz $\mathfrak{F}_0$, im folgenden kurz „*Führungsnetz*" genannt, enthält die z-Achse als Hauptstrahl und ist für $h > 0$ rechtsgewunden, für $h < 0$ linksgewunden, und artet für $h = 0$ in das durch das Ursprungsbündel zu ergänzende Strahlfeld der Grundebene aus.

Jeder Netzstrahl g_0 (3) gleitet während der Bewegung durch den Fixpunkt G (a, b, 0) und bildet mit der z-Richtung einen

[1] Für einen weder der Grundebene noch der Achse angehörenden Fixpunkt F ($x = a$, $y = b$, $z = c$) würde man als Führungslinie eine in der achsenparallelen Ebene $ax_0 + by_0 = a^2 + b^2$ liegende *Hyperbel* f_0 finden, die ständig durch F gleitet.

unveränderlichen Winkel, überstreicht mithin unter der Voraussetzung $h \neq 0$ einen *Drehkegel* Γ mit der Spitze G und z-paralleler Achse. Alle ∞^2 Kegel Γ enthalten natürlich die beiden Hauptpunkte $H_{1,\,2}$.

§ 3. Sei $P_0 \in \Sigma_0$ ein beliebiger eigentlicher und reeller *Punkt* des bewegten Systems, der nicht der z-Achse angehört, und bezeichne g_0 die ihn enthaltende Führungsgerade. Die durch (1) beschriebene *Bahnkurve* k von P_0 erweist sich nach Algebraisierung der Gleichungen mittels der Substitution $\operatorname{tg}(t/2) = v$ als *rationale Raumkurve 4. Ordnung*. Dieselbe verläuft zur Gänze auf dem von g_0 überstrichenen Drehkegel Γ, hat in dessen Spitze G einen Doppelpunkt und geht auf jeden Fall (mit $t = \pm\ \pi/2$) durch die beiden Hauptpunkte $H_{1,\,2}$ sowie (mit $v = \pm i$) durch die absoluten Punkte $I_{1,\,2}$ der Grundebene.

Um das Büschel der die Quartik k tragenden Flächen 2. Ordnung zu ermitteln, bilde man den Ausdruck $x^2 + y^2 + \lambda z^2$; werden anschließend die auftretenden Winkelfunktionen mittels der aus (1) fließenden Relationen

$$\cos^2 t = \frac{x_0 x + y_0 y}{x_0^2 + y_0^2}, \quad \sin t \cos t = \frac{x_0 y - y_0 x}{x_0^2 + y_0^2}$$

eliminiert, so erhält man die von jedem Bahnpunkt $P\,(x, y, z)$ erfüllte Bedingung

$$x^2 + y^2 + \lambda z^2 = 2\,m\,x + 2\,n\,y + \lambda h^2$$

$$\text{mit } 2\,m = x_0 + \lambda \frac{(z_0^2 - h^2)\,x_0 - 2\,h\,y_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2},$$

$$2\,n = y_0 + \lambda \frac{(z_0^2 - h^2)\,y_0 + 2\,h\,x_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2} \tag{4}$$

(4) stellt für jedes $\lambda = \text{const}$ eine zur Grundebene symmetrische *Drehquadrik* Ω mit z-paralleler Achse und dem Mittelpunkt $M\,(m, n, 0)$ dar, welche die Bahn k (und damit auch die beiden Hauptpunkte $H_{1,\,2}$) enthält. Unter diesen einander im Doppelpunkt G von k berührenden Drehflächen finden sich ein *Drehzylinder* ($\lambda = 0$), eine *Kugel* ($\lambda = 1$), der *Drehkegel* Γ ($\lambda h^2 + m^2 + n^2 = 0$, also $\lambda = -(x_0^2 + y_0^2)/(z_0^2 + h^2)$) und schließlich als Grenzform für $\lambda \to \infty$ ein *parabolischer Zylinder*.

Aus diesen Feststellungen geht hervor, daß die *Punktbahnen* der betrachteten Bewegung sogenannte *Hippopeden* des Eudoxus sind [2], d. s. doppeltsymmetrische, rationale, sphärische Quartiken, die durch eine Affinität in das bekannte „Vivianische Fenster" übergeführt werden können [1]. Die zur Untersuchung gestellte Bewegung könnte daher „Hippopedenbewegung" genannt werden.

§ 4. Von jeder Sorte $\lambda = \text{const}$ existieren ∞^2 Quadriken Ω, auf welche sich also die ∞^3 Punktbahnen k zu je ∞^1 verteilen. Damit erhebt sich die Frage nach der *Ortslinie* aller Punkte P_0, deren Bahnhippopeden auf derselben, durch m, n und λ bestimmten Quadrik Ω verlaufen. Die Antwort ist aus (4) abzulesen: Es handelt sich um jene Punkte der gegebenen Quadrik $x_0{}^2+y_0{}^2+\lambda z_0{}^2 = 2mx_0+2ny_0+\lambda h^2$, die in der Durchmesserebene

$$nx_0 - my_0 = \lambda h z_0 \;, \tag{5}$$

also auf einem gewissen *Kegelschnitt* l_0 liegen. Man überzeugt sich leicht, daß l_0 die Eigenschattengrenze von Ω für jene Lichtrichtung ist, die durch den Führungsstrahl des Flächenmittelpunktes M $(m, n, 0)$ angezeigt wird.

Im Sonderfall $\Omega = \Gamma$ artet l_0 in die Kegelerzeugende g_0 aus. — Der Grenzfall des parabolischen Zylinders erfordert eine eigene Behandlung. Die auf einem solchen Zylinder $z_0{}^2 = 2px_0+2qy_0+h^2$ wandernden Punkte P_0 erfüllen die in der Ebene $qx_0 - py_0 = hz_0$ liegende Parabel.

§ 5. Sei $\delta_0 \in \Sigma_0$ eine beliebige *Ebene* des bewegten Systems, die weder normal noch parallel zur Achse ist, und bezeichne g_0 den ihr angehörenden Strahl des Führungsnetzes. Mit g_0 wird die Ebene δ_0 durch einen Fixpunkt G der Grundebene geführt, und da ihr Neigungswinkel ϑ gegen die Achse unverändert bleibt, so hüllt sie im Laufe der Bewegung einen von G ausstrahlenden *Drehkegel* Δ mit z-paralleler Achse und dem Öffnungswinkel $2\,\vartheta$ ein. Δ umschließt den von g_0 erzeugten Drehkegel Γ und fällt mit diesem dann und nur dann zusammen, wenn g_0 Fallinie von δ_0 ist.

Für eine *achsenparallele Ebene* $\alpha_0 \in \Sigma_0$ artet der Hüllkegel in eine achsenparallele *Gerade* a durch den Spurpunkt des α_0 angehörenden Netzstrahls aus: Achsenparallele Ebenen durchlaufen mithin während der Bewegung *Ebenenbüschel*.

[1] Vivianische Fenster selbst durchlaufen jene Punkte P_0, deren Träger-Drehkegel Γ rechtwinklige Öffnung haben, d. s. die Punkte des einschaligen Drehhyperboloides $x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2 = h^2$.

Die Tatsache, daß *sämtliche Ebenen des bewegten Systems durch feste Punkte geführt* werden, erinnert an die bekannte Mannheim-Bewegung eines starren Systems. Während jedoch dort die Fixpunkte den ganzen Raum erfüllen, sind sie hier auf die Grundebene $z = 0$ beschränkt.

§ 6. Sei schließlich $e_0 \in \Sigma_0$ eine allgemeine *Gerade* des bewegten Systems, die weder normal noch parallel zur Achse ist, und bezeichne ϑ ihren Winkel gegen die Achsenrichtung. Um die *Bahnfläche* Θ von e_0 zu kennzeichnen, lege man durch e_0 die achsenparallele Ebene α_0 und die dazu normale Ebene β_0; die zugehörigen Führungspunkte in der Grundebene seien A und B. Diese Fixpunkte sind voneinander verschieden, wenn e_0 nicht dem Führungsnetz $\mathfrak{F}_0$ angehört, und sie erscheinen dann aus dem Spurpunkt E von e_0 unter rechtem Winkel. Der Ort von E im Verlauf der Bewegung ist demnach der in der Grundebene gelegene *Kreis* c mit dem Durchmesser AB. Jede Einzellage e von e_0 trifft also diesen Kreis c sowie die Achsenparallele a durch A (als Trägergerade des von α_0 durchlaufenden Büschels), und zwar letztere unter dem unveränderlichen Winkel ϑ.

Hieraus ist zu erkennen, daß die von e_0 überstrichene Bahnfläche Θ eine *Regelfläche 4. Grades* ist, bestimmt durch die Leitgerade a, den eigentlichen Leitkreis c und einen uneigentlichen Leitkreis q mit dem Öffnungswinkel $2\,\vartheta$. Da a und c Doppellinien der Fläche sind, gehört dieselbe zur *V. Art* nach R. Sturm [3]. Die ∞^4 auftretenden Bahnflächen Θ sind untereinander affin, für gleiches ϑ sogar ähnlich. Als Prototyp mag die von der Systemgeraden $x_0 : y_0 : z_0 = 0 : 1 : 1$ erzeugte Fläche

$$(x^2 + y^2 - hx)^2 = (x^2 + y^2) z^2 \tag{6}$$

dienen, die die z-Achse zur Doppelgeraden a hat. Die Doppeltorse zerfällt in das Ebenenbüschel a und den parabolischen Zylinder $z^2 = -4hx$.

Diese metrisch ausgezeichneten Strahlflächen 4. Grades verwendete Th. Schmid zur konstruktiven Lösung der Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschnitts [4]. Sie können auch durch *zylindrische Rollung* erzeugt werden, indem um einen festen Drehzylinder ein ihn umschließender Drehzylinder von doppeltem Durchmesser rollt und eine Gerade mitnimmt, die seine Achse unter schrägem Winkel ϑ schneidet [5]. Die einzelnen Punkte der Geraden durchlaufen dabei als Schichtenlinien aufzufassende *Pascalschnecken*, abgesehen vom Achsenpunkt, der den Doppelkreis c beschreibt. Eine andere kinematische Erzeugung der

Fläche besteht darin, eine die Achse a schräg schneidende Gerade einem *harmonischen Umschwung* der Frequenz 1 um a zu unterwerfen (Mannheim-Darbouxscher Umschwung) [6, 7]. Die einzelnen Punkte der Geraden (abgesehen vom Achsenpunkt) laufen dabei auf *Ellipsen*, die in den Tangentialebenen des vorhin erwähnten doppeltberührenden parabolischen Zylinders liegen. — Aus der vorliegenden Erzeugung der Fläche durch die *Hippopedenbewegung* folgt noch, daß die aus den Punkten des Doppelkreises c an die Fläche legbaren *Berührungskegel* durchwegs achsenparallele *Drehkegel* sind: Es sind dies jene Kegel Δ, die gemäß § 5 von den Ebenen des Büschels e_0 eingehüllt werden.

§ 7. Zum Schluß bleiben noch die in § 6 ausgeschlossenen Annahmen zu erledigen.

Für eine dem *Führungsnetz* $\mathfrak{F}_0$ angehörende, eigentliche und von der Achse verschiedene Gerade reduziert sich die Bahnfläche gemäß § 2 auf einen *Drehkegel* mit z-paralleler Achse, dessen Spitze in der Grundebene liegt und als Grenzform des Doppelkreises c anzusehen ist.

Für eine *achsenparallele Gerade* ergibt sich nach § 3 als Bahnfläche ein *Drehzylinder* ($\lambda = 0$).

Für eine *achsennormale Gerade* stellt sich als Bahnfläche eine Regelfläche 4. Grades und VII. Art ein, die als spezielles *Kugelkonoid* wohlbekannt ist und etwa durch die von der x-Achse erzeugte Fläche

$$(x^2+y^2)z^2 = h^2y^2 \qquad (7)$$

repräsentiert werden mag. Dieselbe besteht aus allen Tangenten der Kugel $x^2+y^2+z^2 = 2hy$, welche die ebenfalls die Kugel berührende z-Achse rechtwinklig schneiden. Auch diese Fläche kann durch harmonischen (Mannheim-Darbouxschen) Umschwung erzeugt werden [6, 7]; die dabei auftretenden Bahnellipsen sind Fallinien der Fläche, wenn die z-Achse lotrecht steht.

Die im *Grenzfall* $h = 0$ der Hippopedenbewegung vorliegenden Verhältnisse sind nur geringfügig modifiziert und sollen daher nicht näher erörtert werden.

Literatur:

[1] W. Wunderlich: Axiale Ebenenverwandtschaften. Monatsh. Math. 67 (im Druck).

[2] G. Loria: Curve sghembe speciali, I (Bologna 1925), 199 ff.

[3] E. Müller-J. Krames: Vorlesungen über Darstellende Geometrie, III (Wien 1931), 258 ff.

[4] Th. Schmid: Darstellende Geometrie, II (Berlin/Leipzig 1921), 292 ff.

[5] E. M. Blake: The Ellipsograph of Proclus. Amer. J. Math. 22 (1900), 146—153.

[6] W. Kautny: Über die durch harmonischen Umschwung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. 63 (1959), 169—188.

[7] J. Krames: Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes. Monatsh. Math. Phys. 46 (1937), 38—50. — Die Borel-Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden. Monatsh. Math. Phys. 46 (1937), 172—195. — Über die durch aufrechte Ellipsenbewegung erzeugten Regelflächen Θ. Jahresber. Deutsche Math. Ver. 50 (1940), 58—64.

[8] W. Wunderlich: Flächen mit Kegelschnitten als Fallinien. J. reine angew. Math. 208 (1961), 204—220.

Österreichische Staatsdruckerei. 268 63