

SUR UNE CERTAINE GÉNÉRALISATION DES CYCLOÏDES

W. WUNDERLICH (Vienne)

§ 1. GÉNÉRATION CINÉMATIQUE D'UNE FAMILLE PARTICULIÈRE DE COURBES PLANES SEMBLABLES À LEURS DÉVELOPPÉES

Considérons dans le plan euclidien une droite mobile t qui tourne avec la vitesse constante $+1$ autour d'un de ses points, M , pendant que celui-ci se déplace sur une spirale logarithmique l , de telle manière que la vitesse angulaire du rayon OM (O désignant le centre de la spirale) ait une valeur constante $m \neq 1$ (Fig. 1). Nous allons démontrer que l'enveloppe c des diverses positions de t est une courbe semblable à sa développée.

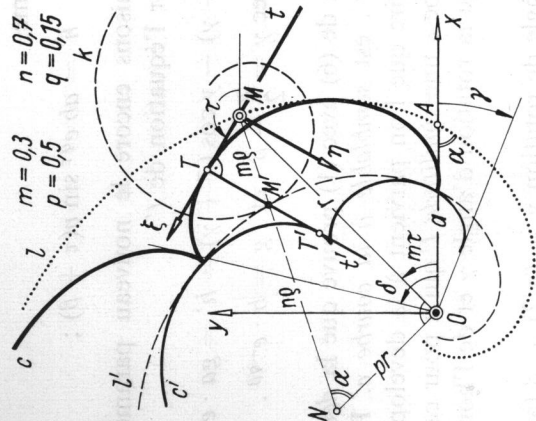


Fig. 1

Supposons donnée la « spirale directrice » l par son équation polaire

$$(1) \quad r = a \cdot e^{p\varphi},$$

où $p = \cot a$ détermine l'angle de cours constant a que la spirale fait avec ses rayons vecteurs. Alors nous pouvons écrire l'équation cartésienne de la droite mobile t en fonction de l'angle de direction $(Ox, t) = \tau = \varphi/m$ sous la forme

$$(2) \quad x \sin \tau - y \cos \tau = h \quad \text{avec } h = a \cdot e^{q\tau} \sin n\tau,$$

où $n = 1 - m \neq 0$ et $q = mp$. Cette équation conserve son sens dans les deux cas limites $q = 0$ ($l =$ cercle) et $n = 1$ ($l =$ droite).

La dérivation de (2) par rapport à τ nous fournit en

$$(3) \quad x \cos \tau + y \sin \tau = h' \quad \text{avec } h' = a \cdot e^{q\tau} (q \sin n\tau + n \cos n\tau)$$

la normale t' de l'enveloppe c . De (2) et (3) on tire immédiatement la représentation paramétrique de l'enveloppe c :

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= ae^{q\tau} [(q \sin n\tau + n \cos n\tau) \cos \tau + \sin n\tau \sin \tau], \\ y &= ae^{q\tau} [(q \sin n\tau + n \cos n\tau) \sin \tau - \sin n\tau \cos \tau]. \end{aligned}$$

En posant dans (3)

$$(5) \quad q = b \cos n\beta, \quad n = b \sin n\beta,$$

h' prend la forme

$$h' = ab e^{q\tau} \sin n(\tau + \beta);$$

si nous introduisons encore le nouveau paramètre $\bar{\tau} = \tau + \beta$, nous avons pour l'équation de t'

$$(6) \quad \begin{aligned} x \sin (\bar{\tau} + \gamma) - y \cos (\bar{\tau} + \gamma) &= h' = ga \cdot e^{q\tau} \sin n\bar{\tau} \\ \text{avec } \gamma &= \frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{et} \quad g = b \cdot e^{-q\beta}. \end{aligned}$$

La comparaison de (6) avec (1) prouve que la développée c' de c , engendrée par t' , est semblable à la courbe c . Plus précisément nous pouvons dire que l'on parvient à la développée c' en appliquant à la courbe c une similitude T qui a pour centre l'origine O et se compose de la rotation d'angle γ et de l'homothétie de rapport g .

Puisque l'angle de rotation $\gamma = (\pi/2) - \beta$ (ainsi que β) n'est déterminé par (5) qu'à un multiple de π/n près, il y a une infinité

de similitudes essentiellement distinctes qui transforment c en c' . Il en résulte de plus que la courbe c est semblable à elle-même. On reconnaît aisément qu'une automorphie primitive Δ de c consiste en une similitude de centre O , produit de la rotation d'angle

$$(7) \quad \delta = \frac{m\pi}{n}$$

par l'homothétie de rapport $d = e^{p\delta}$. Cette transformation Δ engendre par inversion et itération tout un groupe discontinu de similitudes automorphes de c .

§ 2. IDENTIFICATION ET MORPHOLOGIE DES COURBES c

h, h', h'' étant les distances du centre O respectivement à la tangente t , à la normale t' de c et à la normale t'' (parallèle à t) de la développée c' , on calcule le rayon de courbure R de c par :

$$(8) \quad \begin{aligned} R = h + h'' &= ae^{q\tau} (A \sin n\tau + B \cos n\tau) \\ \text{avec } A &= 1 + q^2 - n^2, \quad B = 2qn. \end{aligned}$$

C'est V. A. PUISEUX qui a signalé le fait qu'une relation de la forme (8) caractérise des courbes semblables à leurs développées (1). C. A. CROMMELIN et W. VAN DER WOUDE ont donné récemment, dans ce journal, la première représentation paramétrique de ces courbes (2). On vérifie sans difficulté (en appliquant une rotation convenable) que la famille des courbes (8) de PUISEUX — avec coefficients A, B quelconques — est absolument identique à la famille de nos courbes (2).

Pour la construction de ces courbes on pourra donc se servir, au lieu d'une représentation paramétrique qui n'est pas trop commode, de la *génération cinématique* exposée ici et apparemment nouvelle. On complètera la construction des tangentes en déterminant les points de contact : on trouve le point de contact T d'une tangente t en la coupant par la normale t' . Celle-ci passe par le point M' , correspondant au point M de t et situé sur la spirale directrice l' de c' . M' peut être interprété comme *centre instantané*

(1) V. A. PUISEUX : Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes. *J. Math. pur. appl.* 9 (1844), 377-399.

(2) C. A. CROMMELIN - W. VAN DER WOUDE : Quelle courbe est égale à sa développée? Un cas simple. *Simon Stevin* 30 (1953), 17-24. L'illustration dans cet article concerne le cas $q = 0,1, n = 1,1351$, où $\gamma = 15,15^\circ$ et $g = 1$ (v. § 6).

de rotation pour le mouvement de la droite t (v. § 4); il partage le rayon de courbure $MN = r/\sin \alpha$ de la spirale logarithmique l dans le rapport $\overline{MM'} : \overline{NM'} = m : -n$ (Fig. 1).

Dans le cas limite $q = 0$ la spirale directrice l se réduit (à cause de $\alpha = \pi/2$) à un cercle, et l'enveloppe c de la droite mobile t devient une épicycloïde ou une hypocyloïde selon que $|g| = |n| < 1$ ou > 1 . Une telle courbe — dont la relation de similitude à sa développée est bien connue — consiste en arcs égaux en nombre fini ou infini, selon que n est rationnel ou non. Ces arcs élémentaires sont reliés en des points de rebroussement et se permutent sous l'effet de la rotation automorphe Δ .

Dans le cas général $q \neq 0$ la courbe c , toujours transcendante, se compose d'une infinité d'arcs semblables entre eux et aussi reliés en des points de rebroussement. Un tel arc élémentaire, engendrant les suivants par l'application de l'automorphie Δ , appartient à un intervalle $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_0 + |\pi/n|$ avec $\operatorname{tg} n\tau_0 = -B/A$. La courbe c touche la spirale directrice l aux points $\tau = (a + i\pi)/n$ (i entier); il est à observer que ces points sont différents des sommets ($R' = 0$) et que les points de rebroussement ($R = 0$) sont situés sur la développée c' et non sur la spirale logarithmique l' . — A cause de leur analogie avec les cycloïdes il serait raisonnable de donner aux courbes c le nom de « spiraloïdes ». On pourrait encore distinguer entre « épispiraloïdes » et « hypospiraloïdes » selon que $|n| < 1$ ou > 1 ; chez les premières les rebroussements sont dirigés vers l'intérieur, chez les dernières vers l'extérieur de la courbe. Le cas intermédiaire $|n| = 1$ caractérise les « logarithmoïdes », étudiées par E. KÖSTLIN ⁽³⁾, où les tangentes de rebroussement sont parallèles.

§ 3. LES DÉVELOPPOÏDES DES SPIRALOÏDES

Si nous formons la combinaison linéaire des équations (2) et (3) en employant les coefficients fixes $\cos \theta$ et $\sin \theta$, nous arrivons à

$$(9) \quad \text{avec } h^* = ae^{q\tau} [(\cos \theta + q \sin \theta) \sin n\tau + n \sin \theta \cos n\tau]$$

⁽³⁾ E. KÖSTLIN : Über eine transcendente Kurve, von der die Zykloïde ein Grenzfall ist. Mitt. Math. Verein Württemberg 9 (1907), 21-30. — H. WIELEITNER : Spezielle ebene Kurven. Sammlung Schubert 56 (Leipzig 1908), 386.

Cette équation définit un rayon t^* du faisceau tt' qui rencontre la spiraloïde c sous l'angle constant θ . L'enveloppe des ∞^1 droites t^* , obtenues en faisant varier le paramètre τ , est donc en général une développée c^* de c (pour $\theta = 0$ c^* coïncide avec la courbe initiale c , pour $\theta = \pi/2$ avec la développée c'). Une transformation de l'équation (9) d'après le mode de (5) et (6), à l'aide des substitutions

$$(10) \quad \cos \theta + q \sin \theta = b \cos n\beta, \quad n \sin \theta = b \sin n\beta,$$

nous conduit enfin avec $\bar{\tau} = \tau + \beta$ à

$$(11) \quad x \sin (\bar{\tau} + \gamma) - y \cos (\bar{\tau} + \gamma) = h^* = ga \cdot e^{q\bar{\tau}} \sin n\bar{\tau} \\ \text{avec } \gamma = \theta - \beta \quad \text{et} \quad g = b \cdot e^{-q\theta}.$$

La comparaison des équations (11) et (2) nous apprend immédiatement que chaque spiraloïde est semblable non seulement à sa développée, mais aussi à chacune de ses développées. L'angle de rotation γ et le rapport g de la similitude $c \rightarrow c^*$ sont à tirer de (11).

§ 4. BASE ET ROULANTE DU MOUVEMENT DE LA DROITE t

Pour une étude plus profonde du mouvement de l'élément linéaire (Mt) qui engendre la spiraloïde c , introduisons un système mobile de coordonnées cartésiennes ξ, η , dont l'origine soit en M et dont l'axe des ξ coïncide avec t (Fig. 1). La position du système mobile $M(\xi, \eta)$ par rapport au système fixe $O(x, y)$ et en fonction du paramètre τ (temps) peut être décrite d'une manière très élégante et commode en unissant les coordonnées (réelles) en *grands complexes* $z = x + iy$ et $\bar{z} = \xi + i\eta$ ⁽⁴⁾. Le mouvement en question s'écrit alors

$$(12) \quad z = a \cdot e^{(a+i\pi)\tau} + \bar{z} \cdot e^{i\tau}.$$

Cette équation comprend avec $\bar{z} = \text{const}$ toutes les trajectoires du

⁽⁴⁾ L'auteur s'est servi avec succès de cette méthode dans son travail « Höhere Radlinien », Österr. Ingen. Archiv 1 (1947), 277-296. Dans la suite l'usage des nombres complexes en cinématique fut achevé par R. BEREIS : Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen, Österr. Ingen. Archiv 5 (1951), 246-266, et adopté aussi par W. BLASCHKE-H.R. MÜLLER : Ebene Kinematik (München 1956), 56 ff.

mouvement et fournit par dérivation le vecteur vitesse instantanée

$$z' = a(q + im) e^{(q+im)\tau} + \zeta i e^{t\tau}$$

pour chaque point ζ du système mobile. La condition $z' = 0$ conduit en particulier au centre instantané de rotation M' ; sa coordonnée complexe est

$$(13) \quad \zeta_0 = a(iq - m) e^{(q-im)\tau}$$

dans le système mobile, et, tenant compte de (12),

$$(14) \quad z_0 = a(n + iq) e^{(q+im)\tau}$$

dans le système fixe.

Dépendant du paramètre τ , les formules (13) et (14) donnent en même temps les deux lieux du centre instantané M' dans le système mobile et dans le système fixe, c.-à-d. la roulotte et la base du mouvement. Evidemment il s'agit de deux spirales logarithmiques : la base (14) n'est autre chose que la spirale directrice $l' = \Gamma l$ de c' , égale à la spirale l , trajectoire de M , et possédant donc le même angle de cours $a = \text{arccot}(q/m)$; la roulotte k (13) a son centre en M et l'angle de cours $a' = \text{arccot}(-q/n)$. On sait qu'au cours du mouvement la roulotte roule sans glisser sur la base; évidemment les arcs MM' et OM' sont de longueur égale, le point M s'approchant indéfiniment de O pour $\tau \rightarrow \pm \infty$.

Puisque les angles a et a' sont indépendants l'un de l'autre, nous pouvons énoncer la proposition réciproque : Si une spirale logarithmique roule sur une autre, de manière que les centres puissent coïncider au bout du roulement, chaque diamètre de la spirale roulotte enveloppe une spiraloïde.

§ 5. DOUBLE GÉNÉRATION DES SPIRALOÏDES

Si nous changeons les signes de a et n dans l'équation tangentielle (2), elle reste inaltérée. Il s'en suit qu'il doit exister une seconde génération de la spiraloïde c , tout à fait analogue à celle d'où nous sommes partis initialement. Rappelons que dans la première génération (§ 1) le point M de la tangente t parcourait avec la vitesse angulaire $m = 1 - n$ la spirale logarithmique $l(1)$, donnée par les grandeurs a et $\cot a = p = q/(1 - n)$. Dans la seconde génération, un autre point $\bar{M}$ de la tangente t se déplace

avec la vitesse angulaire $\bar{m} = 1 + n$ sur une autre spirale logarithmique $\bar{l}$, déterminée par les grandeurs $\bar{a} = -a$ et $\cot \bar{a} = \bar{p} = q/(1 + n)$ et ayant le même centre O .

Naturellement le mouvement de l'élément $(\bar{M}t)$ peut être également réalisé par le roulement d'une spirale logarithmique sur une autre (§ 4). On constate que la nouvelle roulotte $\bar{k}$ est inversement égale à la roulotte précédente k (13), tandis que la nouvelle base $\bar{l}'$ est égale à la seconde spirale directrice l que nous venons de caractériser.

La double génération des cycloïdes que l'on rencontre dans le cas limite $q = 0$ est bien connue.

En tenant compte des mouvements simultanés des points M et $\bar{M}$ de t , on obtient le résultat : Si deux points $M, \bar{M}$ parcourent deux spirales logarithmiques $r = a \cdot e^{p\varphi}$ et $\bar{r} = -a \cdot e^{\bar{p}\varphi}$ en partant de la position initiale $\varphi = 0$ avec des vitesses angulaires par rapport au centre commun qui sont dans le rapport $\bar{p} : p \neq \pm 1$, la droite joignant M et $\bar{M}$ enveloppe une spiraloïde. — Le théorème analogue concernant les cycloïdes ($p = \bar{p} = 0$, rapport des vitesses arbitraire mais constant $\neq \pm 1$) est classique.

§ 6. SPIRALOÏDES QUI SONT ÉGALES À LEURS DÉVELOPPÉES

Si l'on cherche des spiraloïdes spéciales qui sont non seulement semblables, mais aussi égales à leur développée, on doit déterminer de tels couples de nombres n, q pour lesquels le rapport g , défini par (6), peut prendre la valeur $+1$ ou -1 parmi l'infinité des valeurs dont il est capable. La résolution définitive de ce problème comme elle a été donnée par C.A. CROMMELIN et W. VAN DER WOUDE⁽²⁾ a rectifié une méprise de PUISEUX.

Pour trouver des couples n, q convenables, on peut (dans le cadre de la présente note) se donner la valeur du produit $n\beta = \omega$ et les formules (5) et (6) donnent alors, sous l'hypothèse $g = 1$:

$$(15) \quad q = b \cos \omega, \quad n = b \sin \omega \quad \text{avec} \quad b = e^{\omega \cot \omega}.$$

L'alternative $g = -1$ causerait le changement des signes de n et q et par conséquent ne conduirait qu'à une solution symétrique à la précédente par rapport à l'axe des y ; l'hypothèse $g = -1$ peut donc être supprimée.

La fig. 2 représente un diagramme, obtenu sous l'hypothèse

§ 7. AUTODÉVELOPPÉES

Une question plus particulière est celle de savoir s'il existe parmi les spiraloïdes des « *autodéveloppées* », c.-à-d. des *courbes identiques à leur développée*. Cette question demande outre $g = 1$ encore $\gamma \equiv 0 \pmod{2\pi}$, donc $\beta \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$. L'alternative $g = -1$ combinée avec $\gamma \equiv \pi \pmod{2\pi}$ conduirait aux mêmes résultats.

En principe on pourrait tirer des valeurs convenables de q et n du diagramme fig. 2, en cherchant sur l'échelle des γ les points $\gamma = 0, \pm 360^\circ, \pm 720^\circ$ etc.; il faut pourtant éviter les points singuliers $q = 0, n = \pm 1$, les solutions correspondantes étant dégénérées. Néanmoins ce sont juste les solutions immédiatement voisines qui offrent un intérêt particulier, parce qu'elles déterminent des spiraloïdes sans intercroisements.

En tenant compte de la double génération des spiraloïdes (§ 5), il suffit de se borner au voisinage du point critique $q_0 = 0, n_0 = 1$, caractérisé par $\omega_0 = \pi/2 + j\pi, b_0 = (-1)^j$ avec j entier. A cause des relations $\omega = n\beta$ et (6) on a les valeurs correspondantes $\gamma_0 = -j\pi$ et $g_0 = (-1)^j$. Pour arriver maintenant aux valeurs voisines $\gamma = -j\pi \mp 2\pi, g = g_0$ restant conservé, on a à résoudre le système d'équations

$$(16) \quad n = \frac{\omega}{\beta} = (-1)^j e^{\omega \cot \omega} \sin \omega, \text{ où } \beta = \frac{\pi}{2} + j\pi \pm 2\pi.$$

Grâce à la précaution d'avoir pris en considération ainsi $g = 1$ comme $g = -1$, il est permis d'écarter le signe inférieur dans (16). En posant $\omega = \omega_0 + \varepsilon$, ces équations prennent la forme

$$(17) \quad n = \frac{\omega}{\beta} = e^{-\omega \operatorname{tg} \varepsilon} \cos \varepsilon \text{ avec } \beta = \omega_0 + 2\pi, \omega_0 = \frac{\pi}{2} + j\pi.$$

ε étant petit, on peut se servir d'un *procédé d'itération* suffisamment convergent qui, partant des valeurs initiales ω_0 et $\varepsilon_{-1} = 0$, exige les pas suivants :

$$(18) \quad \begin{aligned} \omega_i &= \omega_0 + \varepsilon_{i-1}, \quad n_i = \frac{\omega_i}{\beta}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon_i &= \frac{\ln(\cos \varepsilon_{i-1}/n_i)}{\omega_i} = \frac{\ln(n_i \cos \varepsilon_{i-1})}{-\omega_i}. \end{aligned}$$

Quant aux deux formules pour ε_i , la première s'applique dans le

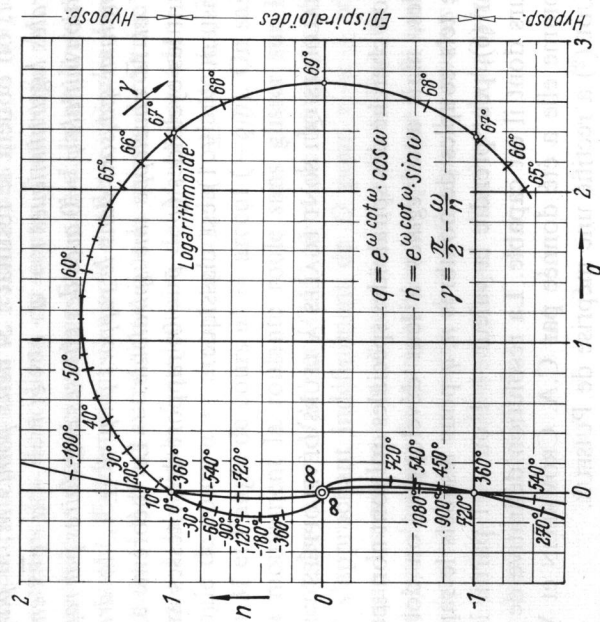


Fig. 2

On pourrait construire des échelles analogues de γ pour une série d'autres valeurs de g et unir enfin ces échelles dans un *nomogramme* ⁽⁵⁾. — Si on veut, on peut regarder les nombres complexes $z = q + in$ comme solutions de l'équation $z = g \cdot e^{\beta z}$.

⁽⁵⁾ L'échelle pour $g = -1$ serait symétrique par rapport à l'origine de celle de la fig. 2, cependant avec des valeurs supplémentaires de γ .

cas $n_i < 1$ (épispiraloïdes), la seconde pour $n_i > 1$ (hypospiraloïdes). A l'aide des valeurs ainsi calculées de n et ε on trouve encore $q = -n \operatorname{tg} \varepsilon$, avec quoi on a les grandeurs caractéristiques qui déterminent la spiraloïde cherchée.

Le tableau suivant contient quelques-unes des valeurs calculées, de plus les grandeurs liées $m = 1 - n$, $p = q/m$ et $\delta = m\pi/n$. La partie supérieure comprend des épispiraloïdes, la partie inférieure des hypospiraloïdes. Aux indices manquants $j = -1$ et -2 il n'existe pas de solutions réelles.

j	n	q	m	p	δ°
4	0,69357	-0,01790	0,30643	-0,05841	79,527
3	0,63871	-0,02590	0,36129	-0,07168	101,818
2	0,56069	-0,04074	0,43931	-0,09274	141,033
1	0,44337	-0,07212	0,55663	-0,12957	225,981
0	0,26576	-0,15097	0,73424	-0,20557	497,303
j	n	q	m	p	δ°
-3	4,86835	-1,02133	-3,86835	0,26402	-143,026
-4	2,31698	-0,17857	-1,31698	0,13559	-102,313
-5	1,79471	-0,07457	-0,79471	0,09384	-79,705
-6	1,56905	-0,04100	-0,56905	0,07205	-65,281
-7	1,44317	-0,02596	-0,44317	0,05858	-55,275

Les fig. 3 et 4 montrent les autodéveloppées $j = 2$ et $j = -5$ comme représentants typiques des deux classes de spiraloïdes.

Jadis M. ALLÉ a cru avoir prouvé qu'il ne peut exister d'autres autodéveloppées que certaines *spirales logarithmiques* connues depuis longtemps⁽⁶⁾. Les contre-exemples, apparemment nouveaux, que nous venons de donner, montrent qu'il a été victime d'une erreur.

Nous remarquons encore que le procédé d'itération (18) s'applique aussi avec des valeurs arbitraires de β resp. γ , de sorte qu'on peut déterminer sans peine de cette manière des spiraloïdes qui coïncident avec une de leurs développées d'ordre supérieur.

Nous indiquons enfin la possibilité de construire des exemples

⁽⁶⁾ M. ALLÉ : Ein Beitrag zur Theorie der Evoluten. *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien* 113 (1904), 53-70. Les spirales logarithmiques en question sont caractérisées par des exposants $p > 0$ qui satisfont à la condition $(2j - \frac{1}{2})\pi p + \ln p = 0$ ($j = 1, 2, \dots$); les premières valeurs sont : $p = 0,27441, 0,16427, 0,12183$ etc.

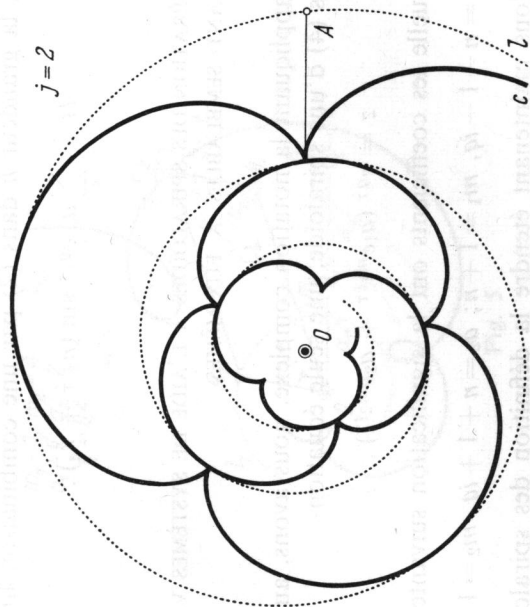


Fig. 3

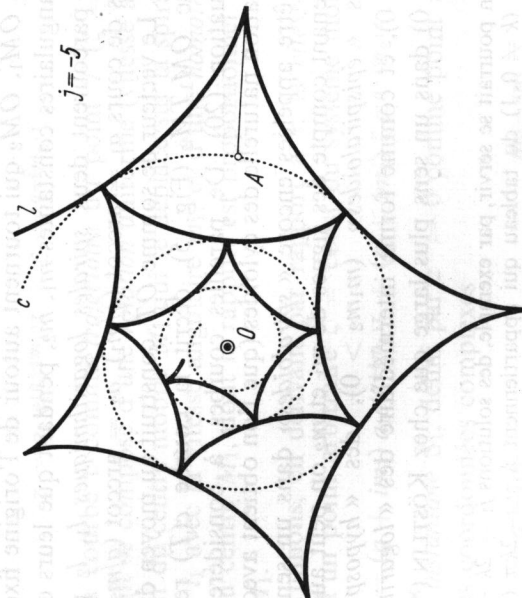


Fig. 4

plus compliqués d'autodéveloppées en remplaçant, à l'aide de différents couples q_s, n_s qui appartiennent à la même valeur de

$\gamma = 2k\pi$, la grandeur h dans (2) par une combinaison linéaire ⁽⁷⁾

$$(19) \quad H = \sum_s a_s e^{a_s \tau} \sin(n_s \tau + \lambda_s).$$

§ 8. GÉNÉRATION DES SPIRALOÏDES À L'AIDE DE SYSTÈMES VARIABLES RESTANT SEMBLABLES À EUX-MÊMES

En appliquant la notation complexe, nous avons, au lieu des équations (4) d'une spiraloïde, une seule équation

$$(20) \quad z = e^{q\tau} (a_1 e^{m_1 i \tau} + a_2 e^{m_2 i \tau}),$$

dans laquelle les coefficients ont la signification suivante :

$$(21) \quad a_1 = n - 1 - iq, \quad m_1 = 1 + n; \quad a_2 = n + 1 + iq, \quad m_2 = 1 - n.$$

Nous allons maintenant étendre la définition des spiraloïdes par la représentation (20) en négligeant les relations (21) : soient, dans ce qui suit, a_1 et a_2 des constantes complexes quelconques $\neq 0$, et $m_1 \neq m_2$ comme $q \neq 0$ des nombres réels arbitraires.

Les deux membres de la somme (20) définissent deux vecteurs variables OM_1 , OM_2 qui tournent autour de l'origine fixe avec les vitesses angulaires constantes m_1 , m_2 , pendant que leurs extrémités M_1 , M_2 parcourent deux spirales logarithmiques l_1 , l_2 possédant les angles de cours $\alpha_1 = \arccot(q/m_1)$, $\alpha_2 = \arccot(q/m_2)$, respectivement. Le vecteur de somme OT , construit au moyen du parallélogramme OM_1TM_2 (Fig. 5), décrit la courbe $c(T)$ représentée par l'équation (20). De pareilles courbes, à considérer comme généralisation naturelle des cycloïdes (que l'on obtient avec $q = 0$), peuvent être appelées encore « spiraloïdes » dans un sens un peu élargi. Tenant compte des signes de m_1 et m_2 on peut aussi distinguer des « épispiraloïdes » ($m_1 m_2 > 0$), des « hypospiraloïdes » ($m_1 m_2 < 0$), et comme forme intermédiaire des « logarithmoïdes » ($m_1 m_2 = 0$) dans un sens plus large que chez KÖSTLIN ⁽⁸⁾.

⁽⁷⁾ On pourrait se servir, par exemple, des solutions $j_1 = 2k - 3$ et $j_2 = -2k - 2$ ($k \neq 0, 1$) du tableau qui appartiennent à $\gamma = 2k\pi$ (v. note 5).

⁽⁸⁾ Les logarithmoïdes au sens élargi permettent une interprétation simple comme projections par rayons parallèles des hélices cylindro-coniques (loxodromes du cône de révolution) que l'on rencontre dans les trajectoires des groupes continus à un paramètre de similitudes spatiales; v. W. WUNDERLICH: Darstellende Geometrie der Spiralfächen. *Monatsh. Math. Phys.* 46 (1938), 248-265.

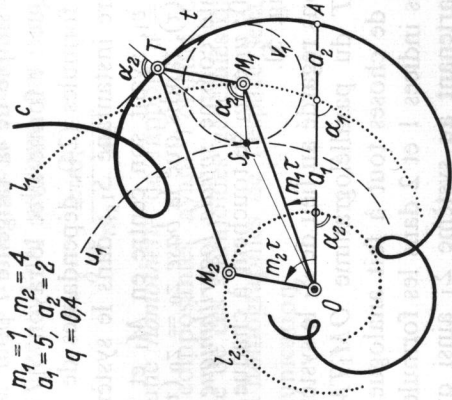


Fig. 5

Considérons le côté M_1T du parallélogramme articulé OM_1TM_2 comme représentant d'un système variable Σ_1 , restant toujours semblable à soi-même. Le « mouvement » de Σ_1 , décrit d'une manière analogue à (12) par l'équation

$$(22) \quad z = a_1 e^{(q+im_1)\tau} + \zeta \cdot e^{(q+im_2)\tau},$$

produit la courbe c comme trajectoire du point T ($\zeta = a_2$). Ce mouvement se compose d'une rotation uniforme (vitesse angulaire m_2) autour du centre mobile M_1 qui se déplace sur la spirale logarithmique l_1 avec la vitesse angulaire m_1 , et d'une homothétie par rapport au centre M_1 , dont le rapport est proportionnel à la distance OM_1 .

Déterminons, en dérivant par rapport à τ , la vitesse instantanée z' d'un point arbitraire $\zeta = \text{const}$ du système mobile Σ_1 :

$$(23) \quad z' = (q + im_1) a_1 e^{(q+im_1)\tau} + (q + im_2) \zeta e^{(q+im_2)\tau}.$$

Le centre instantané S_1 , défini par $z' = 0$ comme point à vitesse nulle, a les coordonnées complexes

$$(24) \quad \zeta_0 = -\frac{q + im_1}{q + im_2} a_1 e^{(m_1 - m_2)i\tau} \text{ resp. } z_0 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 - iq} a_1 e^{(q+im_1)\tau}.$$

Il permet, à cause de la relation

$$(25) \quad z' = (q + im_2)(z - z_0),$$

une construction simple de la tangente t pour la trajectoire d'un point T quelconque : t forme avec le rayon S_1T l'angle donné α_2 (Fig. 5). — Les formules (24), dépendantes de τ , décrivent déjà les lieux du centre instantané S_1 : dans le système mobile Σ_1 on trouve un cercle v_1 , ayant son centre en M_1 et jouant le rôle de *roulante* $\zeta_0 = \zeta_0(\tau)$, tandis que la base $z_0 = z_0(\tau)$ dans le système fixe Σ_0 se présente comme *spirale logarithmique* u_1 , égale à h_1 et du même centre 0; u_1 et v_1 se touchent à chaque instant au centre instantané S_1 (Fig. 5).

Si nous avions regardé au lieu de Σ_1 le système Σ_2 , représenté par le côté M_2T du parallélogramme OM_1TM_2 , nous aurions constaté un état de choses tout à fait analogue. Nous n'aurions qu'à échanger les indices 1 et 2 dans les formules (22) et (25). — Le point T appartenant au système Σ_1 ainsi qu'au système Σ_2 , sa trajectoire, la spiraloïde c , est évidemment susceptible d'une *double génération*. C'est une généralisation du fait bien connu de la double génération des cycloïdes par roulement de cercles, découverte par EULER, LA HIRE et autres.

En excluant le cas exceptionnel $m_2 = -m_1$, dans lequel les trajectoires (20) sont *affines à des spirales logarithmiques* — cas correspondant au mouvement familier à trajectoires elliptiques pour $q = 0$ —, nous pouvons supposer $|m_2| > |m_1|$. Si alors le point considéré $\zeta = a_2$ de Σ_1 se trouve à l'extérieur, au contour ou à l'intérieur du cercle roulant v_1 , nous pourrions parler (comme pour les cycloïdes) de *spiraloïdes « allongées », « cuspidales »* et « *raccourcies* », respectivement. Les conditions correspondantes s'expriment, en conséquence de $|a_2| \gtrless |\zeta_0|$, sous la forme

$$(26) \quad (q^2 + m_2^2) a_2 \bar{a}_2 \gtrless (q^2 + m_1^2) a_1 \bar{a}_1.$$

On s'assure aisément que les spiraloïdes particulières, étudiées dans les §§ 1-7 et distinguées par les conditions (21), appartiennent à la catégorie des spiraloïdes cuspidales. A ce propos il est à remarquer que les développées des spiraloïdes allongées et raccourcies ne sont point des spiraloïdes.

Avant de finir nous indiquons encore les *similitudes automorphes* Δ des spiraloïdes générales qui se composent aussi d'une infinité périodique d'arcs élémentaires, semblables entre eux. Un tel arc est défini par un intervalle de longueur $\lambda = 2\pi/(m_2 - m_1)$ pour le paramètre τ . Correspondant à la transformation para-

métrique $\tau \rightarrow \tau + \lambda$ qui transforme la courbe entière en elle-même, l'arc considéré passe à l'arc adjacent par une *rotation* d'angle

$$(27) \quad \delta = \frac{2\pi m_1}{m_2 - m_1},$$

accompagnée d'une *homothétie* de rapport $d = e^{2\pi i/m_1}$, les deux transformations composantes ayant l'origine O comme centre.

L'importance de ces spiraloïdes générales dans le cadre d'un certain groupe d'homographies de l'espace sera démontrée dans une autre communication.