Über fünf Aufgaben der Seetaktik[1]

Von Walter Wunderlich in Wien, derzeit im Felde

Mit 5 Abbildungen

Der vorliegende Beitrag knüpft an drei Aufgaben aus dem vortrefflichen Büchlein von Meusemann-Stange, „Mathematik und Marine", an, das 1936 als 89. Band der bekannten Lietzmann-Reihe der Mathematisch-physikalischen Bibliothek erschienen ist und eine reiche Auswahl anregender Beispiele zur Belebung des Mathematikunterrichtes bietet. Die drei Aufgaben lauten:

Aufg. 22. Aufdampfen auf geringsten Abstand. Ein Linienschiff L, dessen Höchstgeschwindigkeit v beträgt, sichtet rw. ε im Abstande x_0 einen feindlichen kleinen Kreuzer K, dessen Höchstgeschwindigkeit $u > v$ bekannt ist. Der Küstenverlauf zwingt den Kreuzer, die eingeschlagene Fahrtrichtung beizubehalten. Welche Fahrtrichtung muß L wählen, um auf den kleinsten Abstand x_1 an den schnelleren Kreuzer K heranzukommen? Wie groß ist x_1? Wann wird x_1 erreicht?

Aufg. 23. Aufbleiben auf geringstem Abstand. Der kürzeste Abstand zwischen K und L sei erreicht. Die größte noch Erfolg versprechende Schußweite (oder Sichtweite) sei e. Welchen Kurs muß L nach Erreichen des kürzesten Abstandes steuern, damit K möglichst lange im Schußbereich (oder in Sichtweite) bleibt?

Aufg. 24. Der Hilfskreuzer K sichtet rw. $\varepsilon = 79^0$ im Abstande $x_0 = 6$ sm ein Handelsschiff H. H fährt rw. $\alpha = 350^0$ mit $u = 10$ sm/std und ist wegen des Verlaufs der Küste gezwungen, seine Fahrtrichtung beizubehalten. Kann K die Verfolgung mit Erfolg aufnehmen, wenn seine Höchstgeschwindigkeit (wegen eines Maschinenschadens) nur $v = 8$ sm/std, die wirksame Schußweite $s = 80$ hm beträgt und eine Zeit von 10 min zur Bekämpfung von H erforderlich ist?

Diese Aufgaben fallen ihrem Wesen nach eigentlich in das Gebiet der *Variationsrechnung;* von vornherein kommen jedoch nur *gerade Bahnen* als Lösungen in Frage, denn ein auf gekrümmtem Wege erreichter Punkt kann in derselben Zeit mit geringerer Geschwindigkeit geradlinig eingenommen werden, so daß die Höchstgeschwindigkeit nicht ausgenützt erscheint. Damit ist die Auflösung auf die Bestimmung von Hoch- oder Tiefwerten bei höchstens zwei unabhängigen Veränderlichen zurückgeführt.

Die genannten Aufgaben gestatten nun sämtlich eine bemerkenswerte Behandlung bei Benützung *räumlicher Schaubilder,* die unter Vermeidung jeglicher Rechnung mit darstellend-geometrischen Hilfsmitteln unmittelbar auf einfache *zeichnerische* Lösungen führt und die deshalb für Freunde räumlichen Denkens hier wiedergegeben sei. Aufg. 23 erfährt hierbei eine einfachere Lösung als die von den Verfassern mitgeteilte, und Aufg. 24 findet eine notwendige Ergänzung.

Das benützte Schaubild entsteht in bekannter Weise, indem man über dem Schiffsort S stets die seit der Anfangsstellung verflossene Zeit als Strecke lotrecht aufträgt. Der so erhaltene „Bildpunkt" S^* beschreibt im Verlauf der Be-

1) Freigegeben vom Oberkommando der Wehrmacht, Abteilung für Wehrmachtpropaganda. Berlin, 15. 4. 1941.

wegung eine Raumkurve s^*, deren Grundriß (Normalriß auf die Ebene Π der Bewegung) mit der Schiffsbahn s zusammenfällt. Je größer die Geschwindigkeit ist, desto flacher verläuft die Bildkurve s^*. Einer *gleichförmigen, geradlinigen* Bewegung entspricht eine Bild-*gerade*.

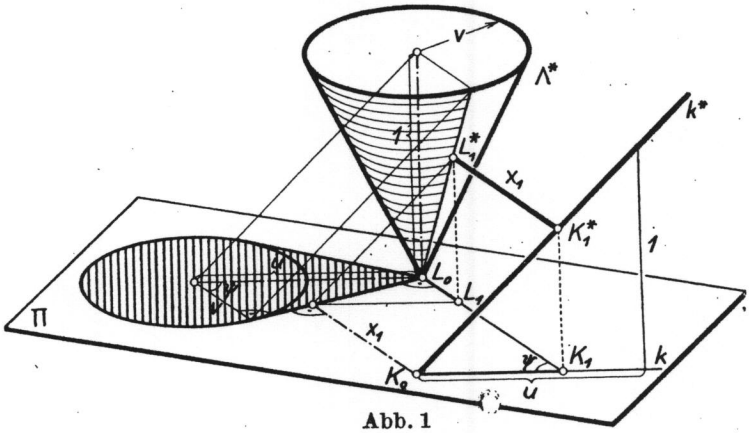

Abb. 1

Aufg. 22 (Abb. 1). Das Schaubild der bekannten Bewegung des Kreuzers K ist eine Gerade k^* durch den Ausgangsort K_0; die allen möglichen Kursen l des Linienschiffs L entsprechenden Bildgeraden l^* (steiler als k^*!) erfüllen einen *Drehkegel* Λ^* mit der Spitze in der Ausgangsstellung L_0 und lotrechter Achse. Unsere Aufgabe, die kleinste mögliche Entfernung zwischen K und L zu finden, läuft im Schaubild darauf hinaus, jenen Punkt L_1^* von Λ^* aufzusuchen, der dem gleich hohen Punkt K_1^* auf k^* am nächsten liegt; kurz gesagt: „Zwischen k^* und Λ^* ist die kürzeste waagrechte Strecke einzuspannen."

Wir projizieren zu diesem Zwecke Λ^* parallel zu k^* auf Π (in der Abbildung als Schatten angedeutet) und fällen aus K_0 (dem Schrägriß bzw. Schatten von k^*) das Lot auf den scheinbaren Umriß (Schlagschattengrenze) von Λ^*. Die Länge des Lotes ist schon der kleinste Abstand x_1, sein Fußpunkt liefert durch Zurückführung auf den Kegel L_1^*; der Übergang zum Grundriß ergibt die Schiffsorte L_1 und K_1 zur Zeit des kürzesten Abstandes, die selbst wieder im Höhenunterschied aufscheint.

Wir lesen aus dem Bild nun ohne weiteres ab: L_1 und K_1 liegen mit L_0 in einer Geraden, und der Winkel ψ, den die beiden Schiffskurse miteinander einschließen, ergibt sich aus $\cos\psi = \frac{v}{u}$. Die in Π liegenden Linien stellen eine zeichnerische Lösung der Aufgabe dar, die durch zentrische Spiegelung $K_0 \leftrightarrow L_0$ in die von Meusemann-Stange angegebene übergeht.

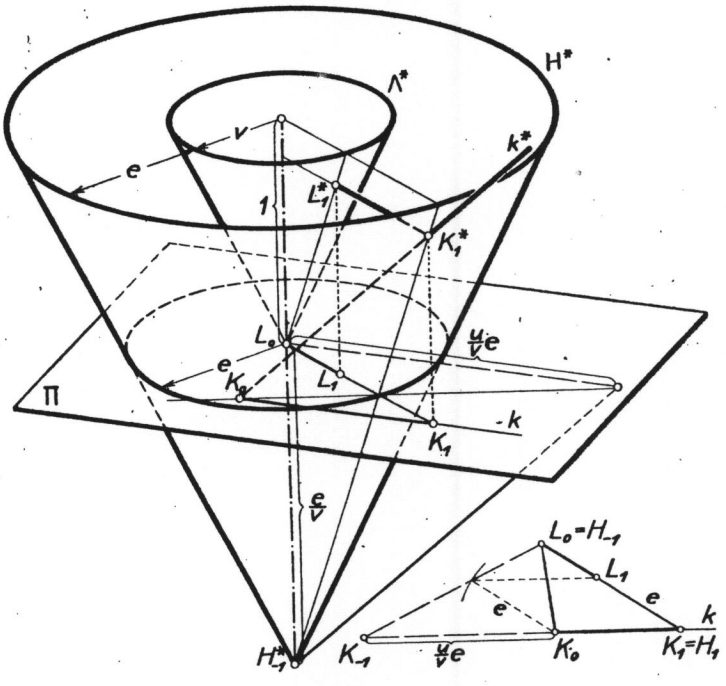

Abb. 2

Aufg. 23 (Abb. 2). Hier ist zwischen k^* und Λ^* eine waagrechte Strecke $K_1^*L_1^*$ von der gegebenen Länge e möglichst hoch einzuspannen. Wir erkennen sofort, daß die Verlängerung der Strecke die Kegelachse treffen muß, und erhalten daher K_1^* in einem Schnittpunkt von k^* mit einem *Hilfskegel* H*, der gleiche Achse und Neigung hat wie Λ^* und Π nach einem Kreis vom Halbmesser e schneidet. Wir legen also durch den Scheitel von H* eine Parallele zu k^* und verbinden deren Spurpunkt mit K_0; die so gewonnene Spur der Scheitelebene durch k^*

schneidet den Grundkreis in zwei reellen Punkten ($K_0 L_0 < e$ ist Voraussetzung!), und durch einen von diesen geht die K_1^* tragende Erzeugende.

Nach Ausübung der zentrischen Spiegelung $K_0 \leftrightarrow L_0$ auf die in Π liegenden Linien gelangen wir zu der angegebenen zeichnerischen Lösung, die sich übrigens auch durch ebene Betrachtungen ableiten läßt: Man führe ein Hilfsschiff H ein, das L um e vorausfährt, und verlege die Ausgangsstellung um jene Zeit $\frac{e}{v}$ zurück, die H (und L) zum Durchlaufen der Strecke e benötigt; der Ausgangsort von H fällt dann nach $H_{-1} = L_0$, K_{-1} liegt um $\frac{eu}{v}$ vor K_0, und nun ist nur die Treffpunktaufgabe für H und K durchzuführen.

Aufg. 24 (Abb. 3). Meusèmann-Stange fügen dieser Aufgabe keine Erklärung hinzu, doch läßt die Fassung der vorhergehenden keinen Zweifel darüber, daß daran gedacht ist, zunächst den kürzesten Abstand $x_1 < s$ nach Aufg. 22 aufzusuchen und

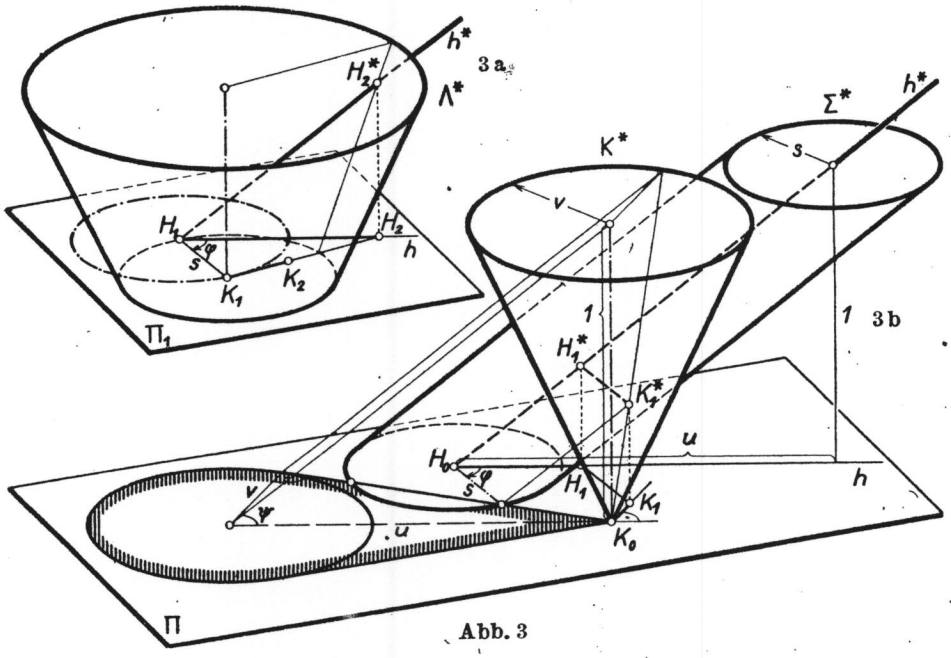

Abb. 3

dann den neuen Kurs nach Aufg. 23 zu bestimmen. Da sich H hierbei durch 55 min auf einer Strecke von 9,2 sm innerhalb des Feuerbereiches von K befindet, kann die gestellte Frage bejaht werden, doch ist die Aufgabe nicht im mathematischen Sinne „gelöst" worden, weil die Bahn von K im Feuerbereich s einen Knick aufweist, also noch nicht die günstigste ist.

Sei $H_1 K_1 = s$ jene Stellung, in der zum erstenmal die Schußweite s erreicht wurde. Von hier ab ist der Kurs nach Aufg. 23 zu bestimmen, also die Bildgerade h^* von H mit dem Hilfskegel Λ^* zum Schnitt zu bringen (Abb. 3a). Der eine Schnittpunkt ist H_1 selbst, der andere, H_2^*, wird um so höher liegen — und das ist ja unser Bestreben —, je kleiner der Winkel $h H_1 K_1 = \varphi$ ist. Um letzteres einzusehen, denke man sich K_1 auf einen Kreis um H_1 wandernd; Λ^* dreht sich hierbei um H_1, und H_2^* beschreibt auf dem Kegel eine Raumkurve 4. Ordnung, die als Schnitt zweier achsenparalleler Drehkegel im Normalriß auf die gemeinsame Symmetrieebene als Parabel mit waagrechter Achse erscheint. (Zur Not würde schon die Tatsache ausreichen, daß die Raumkurve von jeder waagrechten Ebene in höchstens zwei reellen symmetrisch gelegenen Punkten geschnitten wird). — Wir müssen also trachten, φ möglichst klein zu machen.

Nun erst wenden wir uns dem ersten Teil der Aufgabe zu, dem Aufsuchen der Stellung $H_1 K_1$. Für K_1^* stehen uns jene Punkte des Bildkegels K^* aller Kurse von K zur Verfügung, die von der Bildgeraden h^* der Fahrt von H den waagrechten Abstand s besitzen; sie liegen daher auf einem schiefen *Kreiszylinder* Σ^* mit der

Achse h^* und erfüllen die Schnittkurve 4. Ordnung von K^* und Σ^* (Abb. 3b). Projizieren wir wieder alles in der Richtung h^* auf Π, so fällt der Schrägriß (Schatten) der genannten Schnittkurve mit jenem Bogen des Grundkreises von Σ'^* zusammen, der durch den scheinbaren Umriß (Schlagschatten) des Kegels abgeschnitten wird. Der eine Endpunkt des Kreisbogens führt dann auf den für uns günstigsten Punkt K_1^*, da der zugehörige Winkel φ nicht mehr kleiner gemacht werden kann. Der Kurs K_0K_1 steht senkrecht auf der Umrißerzeugenden (vgl. Aufg. 22).

Die „Lösung" dieser reizvollen Hochwertaufgabe lautet mithin: „K schlage den Kurs nach Aufg. 22 ein, halte ihn aber nicht bis zur Erreichung des kleinsten Abstandes x_1, sondern nur bis zur Einnahme der Schußweite $s > x_1$; hier erfolgt der Wechsel auf den Kurs nach Aufg. 23." — Bei der vorliegenden Zahlenangabe ist die erzielbare Verbesserung allerdings nicht bedeutend: H ist nämlich durch 1 std 02 min auf einer Strecke von 10,4 sm im Feuerbereich von K.

Ich möchte nun drei weitere Aufgaben hinzufügen, die ebenfalls die Überlegenheit der geometrischen Behandlung recht augenfällig machen.

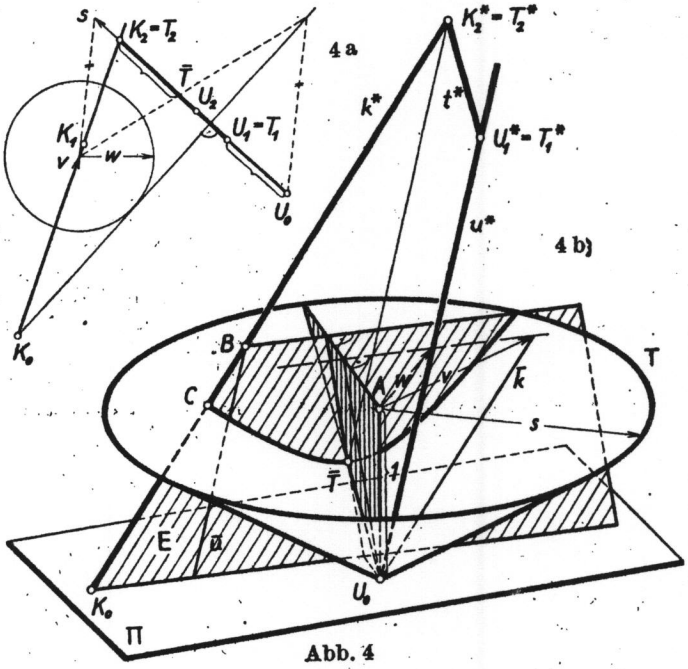

Abb. 4

Aufg. I. Ein Unterseeboot U nähert sich in der Richtung rw. β mit der Geschwindigkeit w einem feindlichen Kreuzer K, der sich augenblicklich in der Entfernung x_0 rw. ε befindet und mit der Geschwindigkeit den Kurs $v > w$ rw. α hält. Wann hat das U-Boot einen Torpedo T mit der Laufgeschwindigkeit $s > v$ abzuschießen, wenn dessen Laufstrecke möglichst kurz sein soll?

Die Aufgabe besteht nach Übertragung in unser räumliches Schaubild darin, zwischen zwei gegebene Gerade k^* und u^* eine möglichst kurze Strecke t^* von bekannter Neigung einzuspannen (Abb. 4a). — Allen möglichen Schußrichtungen in einem Punkt U_1 der Bahn u von U entsprechen die Erzeugenden eines *Drehkegels* T_1^* mit der Spitze U_1^*, von dem natürlich bloß die obere Hälfte in Betracht zu ziehen ist. Um die Schußrichtung zu bestimmen, die den Kreuzer trifft, ist der Kegel mit k^* zum Schnitt zu bringen; der Schnittpunkt K_2^* entspricht dem Aufschlag des Torpedos und bestimmt zusammen mit U_1^* die Bildstrecke t^* seines Laufes.

Um die unendlich vielen möglichen Bildstrecken t^*, die sich bei veränderter Wahl von U_1 ergeben, besser vergleichen zu können, „*sammeln*" wir sie im Ausgangsort, d. h. wir verschieben jedesmal den Kegel parallel zu u^* mit seiner Spitze nach U_0 und nehmen die Gerade k^* dabei mit. Dieselbe bestreicht hierbei eine zu u^* parallele *Ebene* E, die den „Sammelkegel" T nach einer *Hyperbel* ($w < s$!) schneidet. Wir erkennen sofort, daß der kürzesten Torpedoschußweite die Erzeugendenstrecke von U_0 bis zum Hyperbelscheitel $\overline{T}$ entspricht; wir haben dieselbe bloß in der Richtung u^* zurückzuverschieben, bis $\overline{T}$ nach K_2^* auf k^* gelangt, um sie in das Schaubild t^* des gesuchten kürzesten Torpedoschusses überzuführen.

Die zeichnerische Auswertung des Schaubildes ist einfach. Man bringt in U_0 die Vektoren v und w an und verbindet ihre Endpunkte; senkrecht dazu steht der Grundriß der $\overline{T}$ tragenden Kegelerzeugenden (Schußrichtung!). $\overline{T}$ selbst ergibt sich als Durch-

stoßpunkt der Erzeugenden mit der durch k^* und $\bar{u} \parallel u^*$ bestimmten Ebene E, was am besten mit Benützung der Spuren in der Grundebene Π und der um 1 höheren Ebene durchgeführt wird.

Aufg. II: Ein Unterseeboot U sichtet rw. ε in der Entfernung x_0 einen feindlichen Kreuzer K, der mit der Geschwindigkeit v den Kurs rw. α hält. In welcher Richtung hat es zu fahren, um den kürzesten Torpedoschuß anbringen zu können? (U-Bootsgeschwindigkeit $w < v$, Torpedogeschwindigkeit $s > v$.)

Wir setzen unsere Betrachtungen an Abb. 4a fort: Da für u^* oder besser für $\bar{u}$ die Erzeugenden eines Drehkegels Δ mit der Spitze B zur Verfügung stehen, bestreicht die Ebene E einen gewissen Ausschnitt eines *Ebenenbüschels* mit der Achse k^*. $\overline{T}$ durchläuft dabei einen Bogen einer gewissen Raumkurve, und es ist zu vermuten, daß zu einem der Bogenendpunkte der gesuchte Tiefwert gehört, daß also für E eine Tangentialebene des Hilfskegels Δ zu wählen ist. Das würde weiter bedeuten, daß die Fahrtrichtung mit der aus Aufg. 22 übereinstimmt und die Schußrichtung mit ihr zusammenfällt.

Diese Vermutung bestätigt sich tatsächlich, wenn man die Gestalt der Ortskurve von $\overline{T}$ etwas näher untersucht. Es ist eine Kurve 4. Ordnung, die Durchdringung des Sammelkegels T mit einem Hyperboloid, das von den zueinander normalen geschrafften Ebenen erzeugt wird. Sie besitzt einen Doppelpunkt in U_0 und verläuft ganz im Endlichen, da wegen $v < s$ alle Büschelebenen T nach Hyperbeln, aber niemals nach einer Parabel schneiden. C ist der höchste Punkt des auf der oberen Kegelhälfte verlaufenden Teiles, da er auf allen Hyperbeln liegt und deren Scheitel natürlich nicht höher sein können. Entscheidend für uns ist aber, daß kein Stück unseres Kurventeiles einen „tiefsten" Punkt aufweisen kann, da jede waagrechte Ebene die Kurve in höchstens zwei reellen Punkten trifft: Eine solche Ebene schneidet nämlich nicht nur den Kegel, sondern auch das Hyperboloid nach einem Kreis. Letzteres ist eine Folge des rechten Winkels, den die Spuren oder Hauptlinien der erzeugenden Ebenen bilden (so schneidet etwa Π das Hyperboloid nach dem Kreis mit dem Durchmesser U_0K_0, die um 1 höhere Ebene nach dem Kreis mit dem Durchmesser AB). — Stillschweigende Voraussetzung ist natürlich, daß U den Kreuzer nicht erreichen kann, da sonst unsere Aufgabe keinen Sinn hätte; das bedeutet, daß unser Kurvenbogen U_0 nicht enthält.

Die Lösung der Aufgabe lautet somit: „U schlage den Kurs nach Aufg. 22 ein, schieße den Torpedo aber noch vor Erreichung des kürzesten Abstandes x_1 ab, nämlich dann, wenn die Schußrichtung mit der Fahrtrichtung übereinstimmt. Das Auftreffen erfolgt dann, wenn U den kleinsten Abstand x_1 erreicht hat."

Abb. 4b zeigt eine zeichnerische Lösung der Aufg. II im Anschluß an die bei Aufg. I gegebenen Hinweise.

Aufg. III. Ein Dampfer A hält mit $u = 15$ kn den Kurs rw. $\alpha = 35^0$. Er soll mit einem zweiten Dampfer B, der sich augenblicklich $x_0 = 12{,}5$ sm östlich befindet und mit $v = 12$ kn in der Richtung rw. $\beta = 316^0$ fährt, die Post austauschen. Er bedient sich zu diesem Zwecke, um keinen Aufenthalt hervorzurufen, eines Motorbootes C, das $w = 24$ kn entwickelt. Dasselbe wird von A abgelassen, nach dem Eintreffen bei B während der $p = 10$ min, die der Austausch erfordert, ins Schlepptau genommen und kehrt dann zu A zurück.

Wann und in welcher Richtung ist das Motorboot abzulassen, damit der Auftrag in kürzester Zeit durchgeführt wird, und wann kommt es zurück?

Beim Übergang zu einem räumlichen Schaubild durch lotrechtes Auftragen der Zeit über dem Schiffsort erhalten wir den bekannten Bewegungen von A und B entsprechend zwei windschiefe Gerade a^* und b^*, und wir haben ein räumliches *Viereck* $C_1^*C_2^*C_3^*C_4^*$ zu ermitteln, dessen Ecken der Reihe nach der Abfahrt, der Ankunft, der Rückfahrt und der Rückkunft von C entsprechen, und dessen Seiten folgenden Bedingungen genügen:

1. $C_1^*C_2^*$ und $C_3^*C_4^*$ haben die der Geschwindigkeit w entsprechende bekannte Neigung;

2. $C_2^* C_3^*$ liegt auf b^* und hat eine der Zeit p entsprechende Länge;
3. $C_1^* C_4^*$ liegt auf a^* und soll möglichst kurz sein.

Nehmen wir die Strecke $C_2^* C_3^*$ zunächst an beliebiger Stelle von b^* an, so können wir C_1^* bzw. C_4^* in der Weise ermitteln, daß wir von C_2^* einen nach unten geöffneten Drehkegelmantel Γ_2^* ausgehen lassen, dessen Erzeugende die w entsprechende Neigung besitzen, und ebenso von C_4^* einen nach oben offenen Kegelmantel Γ_3^*, welche wir beide mit a^* zum Schnitt bringen. Um die bei veränderter Wahl der Ausgangsstrecke sich ergebenden unendlich vielen Strecken $C_1^* C_4^*$ vergleichen zu können, verschieben wir jedesmal die beiden Kegelmäntel samt der Geraden a^* parallel zu b^*, bis C_2^* in den Ausgangsort B_0 gelangt; a^* bestreicht hierbei eine zu b^* parallele Ebene E, die die aus Γ_2^* und Γ_3^* durch die Verschiebung entstandenen „Sammelkegelmäntel" Γ_2 und Γ_3 nach zwei kongruenten, zentrisch-symmetrischen *Hyperbelästen* h_2 und h_3 schneidet.

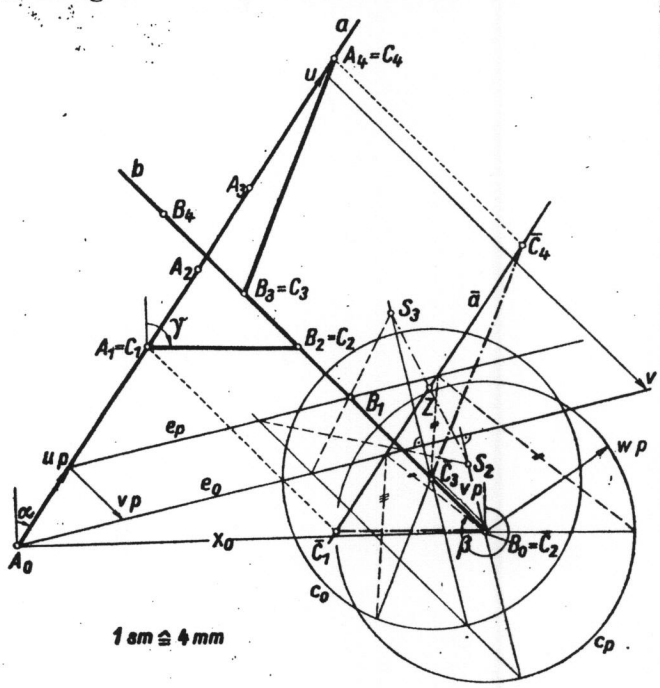

Abb. 5

Wir haben nun parallel zu a^* eine möglichst kurze Strecke $\bar{C}_1 \bar{C}_4$ zwischen h_2 und h_3 einzuspannen; dieselbe muß durch das Symmetriezentrum Z von h_2 und h_3 gehen. Um letzteres einzusehen, denke man sich h_3 in der Richtung a^* so lange verschoben, bis h_2 berührt wird; die Berührung wird offenbar in $\bar{C}_1$ eintreten, so daß also die Hyperbeläste in $\bar{C}_1$ und $\bar{C}_4$ parallele Tangenten besitzen.

Die Konstruktionsvorschrift lautet mithin: Man denke sich Γ_2 und Γ_3 mit der Ebene E geschnitten, bestimme jedoch nur die Scheitel $S_2 S_3$ der Hyperbeläste h_2, h_3; durch die Mitte Z der Strecke $S_2 S_3$ lege man die Gerade $\bar{a} \parallel a^*$ und ermittle deren Durchstoßpunkte $\bar{C}_1, \bar{C}_4$ mit Γ_2, Γ_3. Diese Punkte sind dann noch parallel zu b^* nach a^* zurückzuverschieben und liefern dort C_1^* und C_4^*. — Bei der zeichnerischen Durchführung bedient man sich zweckmäßig der Spurelemente in der Grundebene (Zeit 0) und der zur Zeit p gehörigen Parallelebene.

Für die vorliegenden Zahlenwerte ergibt sich: „Das Boot ist nach 25 min in der Richtung rw. $\gamma = 92^0$ abzulassen, und es kommt nach weiteren 36 min zurück."