

Sonderabdruck aus 67. Band, 1963, 2. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von E. Hawka und N. Hofreiter

Springer-Verlag in Wien
Alle Rechte vorbehalten

Axiale Ebenenverwandtschaften

Von

Walter Wunderlich, Wien
Mit 6 Textabbildungen
(Eingegangen am 6. September 1962)

1. Einleitung

Der Begriff der „axialen Punktverwandtschaft“ wurde von E. Müller eingeführt [1]. Es handelt sich dabei um eine Klasse von Punkttransformationen $T \rightarrow T^*$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes, welche in Zylinderkoordinaten durch

$$r^* = f(r), \quad \varphi^* = \varphi, \quad z^* = z \quad (1.1)$$

beschrieben werden können. Entsprechende Punkte T, T^* gehören jeweils einem Normalstrahl der *Transformationsachse* z an, wobei ihre Abstände r, r^* von dieser Achse durch eine von der Lage des Normalstrahls unabhängige Relation $r^* = f(r)$ verknüpft sind. Die auf einem Normalstrahl herrschende „Elementarkorrespondenz“ $T \rightarrow T^*$ ist also durch Schraubungen um die Achse auf alle übrigen Normalstrahlen übertragen zu denken. — E. Müller studierte speziell die durch $rr^* = c$ erklärte „axiale Inversion“, eine involutorische kubische Transformation, welche in der Theorie der Schraubung eine gewisse Rolle spielt: Sucht man bei einer euklidischen Schraubung mit dem Schraubparameter p zu einer beliebigen Ebene τ jene Punkte T, T^* auf, für welche τ die Bahnnormalebene bzw. die Bahnschmiegebene ist, so hängen diese Punkte durch die axiale Inversion $rr^* = -p^2$ zusammen!

Dem dualen Begriff der „axialen Ebenenverwandtschaft“ wandte dann L. Eichart seine Aufmerksamkeit zu [2]. Wird eine Ebene τ durch ihren Neigungswinkel θ gegen eine lotrecht gedachte Achse z (oder besser durch die Größe $q = \operatorname{tg} \theta$), durch den Richtungswinkel φ ihrer waagerechten Schichtenlinien und durch die Höhenkote z ihres

Achsenpunktes festgelegt, so lauten die Transformationsgleichungen:

$$q^* = f(q), \quad \varphi^* = \varphi, \quad z^* = z. \quad (1.2)$$

Entsprechende Ebenen τ, τ^* haben also stets einen Normalstrahl der Transformationsachse gemeinsam und ihre Neigungen gegen diese Achse sind durch eine von der Lage des Normalstrahls unabhängige Relation verknüpft. Die in dem Ebenenbüschel um einen Normalstrahl her-schende Elementarkorrespondenz $\tau \rightarrow \tau^*$ findet sich, durch Schraubungen um die Achse übertragen, auf jedem anderen Normalstrahl in kon-gruenter Weise wieder. — Ein einfaches Beispiel liefert wieder die euklidische Schraubung: Ordnet man einem beliebigen Raumpunkt T einerseits die Bahnnormalebene τ , andererseits die Bahnschmiegebene τ^* zu, so hängen diese Ebenen durch die axiale Ebenenverwandtschaft $qq^* = -1 (\tau^* \perp \tau)$ zusammen, wobei die Transformationsachse durch die Schraubachse gegeben ist¹.

L. Eckhart betrachtete im Grunde nur die spezielle, durch

$$\tg \frac{\theta}{2} \cdot \tg \frac{\theta^*}{2} = c \quad \text{oder} \quad (1 \pm \sqrt{1+q^2}) (1 \pm \sqrt{1+q^{*2}}) = cq^* \quad (1.3)$$

erklärte axiale Ebenenverwandtschaft und untersuchte vor allem die einem *Ebenenbündel* $F(\tau)$ entsprechende, höchst bemerkenswerte Fläche

4. Ordnung und 4. Klasse $\Phi^*(\tau^*)$, welche bei geeigneter Wahl der Einheit durch die kartesische Gleichung

$$\frac{x^2}{1-z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1 \quad \text{notabel! schreibt dazu et al.} \quad (1.4)$$

beschrieben wird. Diese Fläche besitzt — lotrechte Achsenlage vorausgesetzt — Hyperbeln als Schichtenlinien ($z = \text{const}$), Kreise als Falllinien ($y/z = \text{const}$) und kann als Einhüllende von ∞^1 waagrechten Drehzylin dern oder von ∞^1 Drehkegeln mit lotrechten Achsen („Böschungskegeln“) erzeugt werden. Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß wesentliche Züge dieser Eigenschaften nicht im speziellen Charakter der Eckhartschen Transformation (1.3) begründet sind, sondern im Wesen der axialen Ebenentransformation überhaupt liegen. Wir werden sehen, daß jede Fläche $\Phi(\tau)$, die vermöge irgendeiner axialen Ebenentransformation (mit lotrechter Achse) auf ein Ebenenbündel $F^*(\tau^*)$

abgebildet werden kann, durch *ebene Falllinien* ausgezeichnet ist und als *Einhüllende* von ∞^1 waagrechten, untereinander *ähnlichen Zylindern* oder von ∞^1 *Böschungskegeln* erzeugbar ist. Weitere interessante Eigenschaften einer solchen Fläche Φ nebst einer zyklographischen Kennzeichnung ihrer Schichten- und Falllinien werden sich im Zuge der systematischen Untersuchung der allgemeinen axialen Ebenenverwandtschaft zwanglos einstellen².

2. Grundlegendes

Bezeichne \mathfrak{V} die durch die Elementarkorrespondenz $q^* = f(q)$ definierte axiale Ebenentransformation $\tau \rightarrow \tau^*$ mit der — in der Folge stets lotrecht zu denkenden — Transformationsachse z . Schreiben wir die entsprechenden Ebenen τ, τ^* durch ihre kartesischen Gleichungen

$$ux + vy + wz = 1, \quad u^*x + v^*y + w^*z = 1 \quad (2.1)$$

an, so haben wir

$$q = \tg \theta = \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad q^* = \tg \theta^* = \frac{w^*}{\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}}, \quad (2.2)$$

und wegen (1.2)

$$u : v = u^* : v^*, \quad w = w^*. \quad (2.3)$$

Führen wir noch die Hilfsfunktionen

$$\frac{q}{q^*} = \frac{q}{f(q)} = h(q) \quad \text{und} \quad \frac{q^*}{q} = \frac{q^*}{f^{-1}(q^*)} = h^*(q^*) \quad (2.4)$$

ein, so laufen die *Transformationsgleichungen* in (inhomogenen) Ebenenkoordinaten:

$$u^* = u \cdot h \left(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}} \right), \quad u = u^* \cdot h^* \left(\frac{w^*}{\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}} \right),$$

$$v^* = v \cdot h \left(\frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}} \right), \quad v = v^* \cdot h^* \left(\frac{w^*}{\sqrt{u^{*2}+v^{*2}}} \right), \quad (2.5)$$

$$w^* = w,$$

² Über die wichtigsten Ergebnisse, die auf eine im Sommersemester 1951 an der Technischen Hochschule Wien gehaltene Sondervorlesung über „Spezielle Flächen“ zurückgehen, hat der Verfasser im Rahmen des V. Österreichischen Mathematikerkongresses (Innsbruck, September 1960) kurz berichtet; vgl. Nachr. Österr. Math. Ges. **66** (1961), 68.

¹ Auf nichteuklidische Schraubungen übertragen findet sich die analoge im projektiven Modell gleichfalls kubische Transformation (zusammen mit ihrem euklidischen Grenzfall) bei K. Strubecker [3].

Auf Grund der Erklärung der axialen Ebenenverwandtschaft \mathfrak{B} bleibt die Zuordnung zweier entsprechenden Ebenen τ, τ^* erhalten, wenn man auf beide dieselbe **Drehung** um die Achse oder dieselbe **zentrische Streckung** von einem Achsenpunkt aus (im Grenzfall dieselbe Schiebung längs der Achse) ausübt. Da sich aus diesen Komponenten jede gleich- oder gegensinnige **Ahnlichkeit** \mathfrak{B} aufbauen läßt, die die Achse fest läßt, so gilt:

Satz 1. *Jede axiale Ebenenverwandtschaft verträgt sämtliche Transformationen jener dreigliedrigen Ahnlichkeitsgruppe \mathfrak{G}_3 , die die Achse invariant läßt.*

Die Wirkung einer halben Umdrehung um die Achse hat insbesondere zur Folge, daß neben der Elementarkorrespondenz $q^* = f(q)$ zwangsläufig auch die Korrespondenz $q^* = -f(-q)$ auftritt.

Eine eigentliche, die Achse z rechtwinklig kreuzende Gerade g wird — als Ebenenbüschel $g(\tau)$ aufgefäßt — vermöge \mathfrak{B} in einen zu g parallelen Zylinder T^* transformiert. Dieser Zylinder wird auf Grund der eben gemachten Bemerkung bezüglich der durch g gehenden Ebene $\pi \perp z$ symmetrisch sein oder aus zwei bezüglich π spiegelbildlich angeordneten Teilen bestehen (Abb. 1). Durch die Angabe einer solchen Geraden g und des ihr zugeordneten Zylinders T^* wird im übrigen die Verwandtschaft \mathfrak{B} in rein geometrischer Weise festgelegt. Aus Satz 1 folgt ferner sofort, daß jeder weiteren zu z windschief-normalen Geraden ein zu T^* ähnlicher Zylinder entspricht.

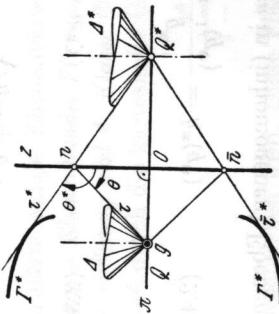


Abb. 1

Satz 2. *Durch eine axiale Ebenentransformation mit lotrechter Achse werden die die Achse waagrecht kreuzenden Geraden in untereinander ähnliche Zylinder oder Zylinderpaare verwandelt, die jeweils zu der be treffenden Geraden parallel laufen und bezüglich der Horizontalebene durch diese Gerade symmetrisch sind.*

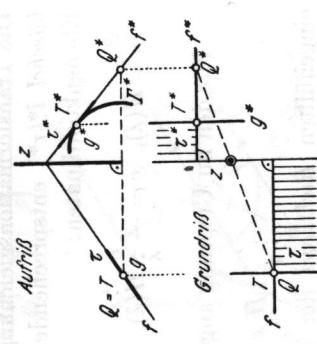
³ Hier besteht ein gewisser Unterschied zu den *axialen Punktverwandtschaften* (1.1), welche gegenüber einer dreigliedrigen *Affinitätsgruppe* invariant sind, die von den Drehungen um die Achse und den orthogonalen Affinitäten mit achsennormalen Fixebenen erzeugt wird. Auch diese Gruppe enthält die Schiebungen längs der Achse.

Sei τ_0, τ_0^* ein Ebenenpaar der Transformation \mathfrak{B} . Durch Anwendung der ∞^3 Ähnlichkeiten $\mathfrak{U} \in \mathfrak{G}_3$ gehen daraus bloß ∞^2 weitere Ebenenpaare τ, τ^* von \mathfrak{B} hervor, gekennzeichnet durch $q = q_0$ und $q^* = q_0^*$. Diese Ebenen entsprechen einander auch in jener *axialen Streckung* (Affinität) \mathfrak{G} , die auf den Normalstrahlen der Achse z die Punkte in der Weise zuordnet, daß ihre Achsenabstände das konstante Verhältnis $r : r^* = q_0 : q_0^*$ aufweisen (linearer Sonderfall einer axialen Punkt- oder Ebenenverwandtschaft). Greift man nun aus den ∞^2 Ebenen τ eine einparametrische, kontinuierliche Schaar heraus, so besitzt dieselbe als Einhüllende eine gewisse *Böschungskugel* \mathcal{O} , der vermöge \mathfrak{B} eine zu ihr affine *Böschungskugel* $\mathcal{O}^* = \mathfrak{G} \cdot \mathcal{O}$ entspricht. Schichtenschnitte in gleicher Höhe sind dabei zentrisch ähnlich mit dem Ähnlichkeitszentrum auf z . Von besonderer Wichtigkeit ist der Spezialfall der einander solcherart entsprechenden *Böschungskegel*, d. h. Drehkegel A, A^* mit lotrechten Achsen ($\text{Öffnungswinkel } 2\theta, 2\theta^*$); ihre Spitzen Q, Q^* bilden natürlich auch ein Punktpaar der Affinität \mathfrak{G} (vgl. Abb. 1).

Satz 3. *Durch eine axiale Ebenentransformation mit lotrechter Achse werden Böschungskegel wieder in Böschungskegel verwandelt, wobei die Spitzen entsprechender Kegel jeweils auf einem Normalstrahl der Transformationsachse liegen.*

Nunmehr sind wir in der Lage, zu irgendeinem *Flächenelement* (τ, T) das entsprechende Flächenelement (τ^*, T^*) auf einfache Weise zu konstruieren (Abb. 2). Wir ziehen einmal die in der Ebene τ verlaufende und den Punkt T enthaltende waagrechte Gerade g heran, deren zugeordneten Horizontalzylinder T^* wir gemäß Satz 2 als bekannt voraussetzen dürfen; zum anderen betrachten wir irgend einen Böschungskegel A , der τ längs der durch T gehenden Falllinie f berührt, und ermitteln den gemäß Satz 3 entsprechenden Drehkegel A^* . Das gesuchte Flächenelement (τ^*, T^*) ergibt sich dann im Berührungsselement von T^* und A^* ; sein Punkt T^* befindet sich im Schnitt der Berührungsgeraden g^* und f^* von τ^* mit T^* und A^* . — Bei der in Abb. 2 ersichtlichen zeichnerischen Durchführung der Konstruktion wurde die Kegelspitze Q in T angenommen.

Abb. 2



⁴ Hier gelangt man vom horizontalen Strahl τ zu τ^* über die horizontale Achse f und die Achse z zu z^* .

Nach diesem Prinzip kann nun zu jeder Fläche $\Phi(\tau)$ die ihr vermöge \mathfrak{B} entsprechende Fläche $\Phi^*(\tau^*)$ auch punktweise ermittelt werden. Hervorzuheben wäre, daß einander dabei einmal die *Eigenschattengrenzen für waagrechte Lichtrichtungen* ($\varphi = \varphi^* = \text{const}$) zugeordnet sind, zum anderen aber auch die *Isohofoten für lotrechte Beleuchtung* ($\theta, \theta^* = \text{const}$).

3. Transformation eines Ebenenbüschels

Ein *Ebenenbüschel* wird durch eine axiale Ebenentransformation \mathfrak{B} in die Scher der Torsen A Tangentialebenen einer gewissen *Torse* verwandelt. Einer bequemeren Bezeichnungsweise zuliebe soll das Ebenenbüschel im zweiten System angenommen werden. Seine Trägergerade l^* möge ferner zur Transformationsachse z windschief sein, um Ausartungen zu vermeiden; mit Rücksicht auf Satz 1 kann sie dann etwa in der Lage

$$x = 1, z = cy \quad (3.1)$$

vorausgesetzt werden. Die Büschelebenen τ^* werden dann mit Hilfe eines Parameters λ durch

$$\lambda(x - 1) - cy + z = 0 \quad (3.2)$$

erfaßt, haben also die in (2.1) erklärten Koordinaten

$$u^* = 1, \quad v^* = -\frac{c}{\lambda}, \quad w^* = \frac{1}{\lambda}. \quad (3.3)$$

Die Transformationsgleichungen (2.5) liefern dann für die dem *Ebenenbüschel* $l^*(\tau^*)$ entsprechende *Torse* $A(\tau)$ die Parameterdarstellung in Ebenenkoordinaten:

$$u = H(\lambda), \quad v = -\frac{c}{\lambda} H(\lambda), \quad w = \frac{1}{\lambda} \quad \text{mit} \quad H(\lambda) = h^* \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + c^2}} \right). \quad (3.4)$$

Für den im Ursprung angebrachten, von der Ebene eingehüllten *Richtkegel* der Torse A findet man mit Benützung der Ableitung $H' = dH/d\lambda$ die Darstellung

$$x : y : z = cH' : (H + \lambda H') : cH^2. \quad (3.6)$$

Dieser Richtkegel entspricht im übrigen in der Transformation \mathfrak{B} jenem speziellen Ebenenbüschel, dessen Trägergerade der zu l^* parallele (die Achse schneidende) Ursprungsstrahl $x = 0, z = cy$ ist.

Jede Büschelebene τ^* (3.2) und die ihr zugeordnete Tangentialebene τ der Torse A haben definitionsgemäß einen Normalstrahl n der Achse z gemeinsam, welcher, da er in τ^* verläuft, die Büschelachse l^* trifft. Die Gesamtheit der so gekennzeichneten ∞^1 Strahlen n bildet die waagrechte Erzeugendenschar eines *orthogonalen hyperbolischen Paraboloids* II mit der Gleichung

$$xz = cy. \quad (3.7)$$

Jede Tangentialebene τ der Torse A ist demnach auch Tangentialebene des Paraboloids II , mit anderen Worten: *A ist II berührend umschrieben*. Für die *Berührungscurve* b findet man durch den Koeffizientenvergleich der Tangentialebene $Zx + Xz = c(y + Y)$ mit (3.4) die Parameterdarstellung

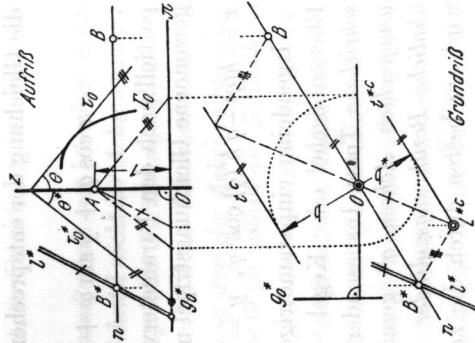
$$X = \frac{1}{H(\lambda)}, \quad Y = \frac{\lambda}{c H(\lambda)}, \quad Z = \lambda. \quad (3.8)$$

Satz 4. Durch eine axiale Ebenenverwandtschaft wird ein Ebenenbüschel allgemeiner Lage in eine Torse transformiert, welche jenem hyperbolischen Paraboloid umschrieben ist, das die Transformationsachse, die dazu normale Ferngerade und die Büschelachse enthält.

Die in Abb. 3 dargestellte Konstruktion der Berührungscurve b benützt einen Zentralriß der Fernebene π aus dem der Transformationsachse z angehörenden Augpunkt $A(0, 0, 1)$ auf die Grundebene $\pi(z = 0)$. Die Fluchtpunkte t^*, t^{*c} entsprechender Ebenen τ, τ^* sind jeweils parallel und haben die Ursprungsabstände q und $q^* = f(q)$.

Bei der Transformation eines Ebenenbüschels $l^*(\tau^*)$ durchläuft t^{*c} jenes Strahlbüschel, dessen Scheitel der Fluchtpunkt L^{*c} der Büschelachse l^* ist, und t^* hält die Fluchtpur der Torse A (gleichzeitig auch ihres Richtkegels) ein. Bezeichnet II wieder das von den Normalstrahlen $n = \tau\tau^*(n \parallel t^{*c})$ gebildete Paraboloid, und beachtet man, daß die Berührungspunkte B und B^* von τ und τ^* mit

Abb. 3



III Achsenabstände haben, die zu q und q^* proportional sind, so läßt sich B aus $B^* = l^* n$ leicht ermitteln. Auf diese Weise erhält man im Ort der Punkte B die Berührungscurve b von Δ und Π .

4. Transformation eines Ebenenbündels

Ein Ebenenbündel $F^*(\tau^*)$ allgemeiner Lage wird vernöge einer axialen Ebenenverwandtschaft \mathfrak{F} auf das System der ∞^2 Tangentialebenen einer gewissen Fläche $\Phi(\tau)$ abgebildet. Alle ∞^3 derartigen Flächen sind zufolge Satz I untereinander ähnlich, so daß es genügt, die Annahme $F^*(1, 0, 0)$ zu betrachten.

Wegen $w^* = 1$ lautet die Gleichung der Fläche Φ in inhomogenen Ebenenkoordinaten u, v, w auf Grund von (2.5):

$$u \cdot h \left(\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right) = 1. \quad (4.1)$$

Eine Parameterdarstellung in Punktkoordinaten ergibt sich, wenn man, ausgehend von der Gleichung der Bündelebene τ^* ,

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + z q^* = \cos \varphi, \quad (4.2)$$

die Gleichung der entsprechenden Ebene τ ,

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + z q = -q' h'(q) \sin \varphi + h(q) \cdot \cos \varphi, \quad (4.3)$$

partiell nach den Parametervariablen φ und q differenziert und das so gewonnene Gleichungstripel nach x, y, z auflöst. Man erhält so:

$$x = h(q) - q' h'(q) \cos^2 \varphi, \quad y = -q' h'(q) \sin \varphi \cos \varphi, \quad z = h(q) \cos \varphi. \quad (4.4)$$

Irgendeine einparametrische Mannigfaltigkeit vom Bündelebenen-Ebenenbüschel oder Kegel — führt jeweils auf eine der Fläche umschriebene Tore. Insbesondere entsprechen den ∞^1 Ebenenbüscheln mit waagrechten Achsen q^* gemäß Satz 2 ∞^1 waagrechte, untereinander ähnliche Berührungszyylinder $\Gamma(\varphi = \text{const.})$. Ihr Profil (Normalschnitt) wird am besten durch die zu $\varphi = 0$ und π gehörige Flächenkurve c_0

$$x = h(q) - q' h'(q), \quad y = 0, \quad z = \pm h'(q) \quad (4.5)$$

repräsentiert, die im folgenden das „Hauptprofil“ heißen soll. Dieses (zur x -Achse symmetrische) Hauptprofil c_0 ist die Berührungsline der Fläche Φ mit dem zur Symmetrieebene $y = 0$ normalen Zylinder Γ_0 . Es ist — zusammen mit seiner Symmetrieebene x — für die Fläche Φ

kennzeichnend; bei der in Abschnitt 1 erwähnten Eckhartschen Fläche (1.4) beispielsweise ist das Hauptprofil ein Kreis.

Betrachten wir ferner die ∞^1 dem Bündel angehörenden Böschungskegel $\Delta^*(q^* = \text{const.})$. Ihnen entsprechen gemäß Satz 3 ∞^1 der Fläche Φ umschriebene Böschungskegel $\Delta(q = \text{const.})$, die ihre Spitzen auf der x -Achse (dem F^* enthalten, den Normalstrahl) haben.

Jeder dieser Drehkegel Δ berührt jeden der vorhin genannten Zylinder Γ in zwei zur Symmetrieebene $z = 0$ spiegelbildlich angeordneten Punkten T, \bar{T} von Φ , insbesondere den y -parallelen Zylindern Γ_0 in zwei zur x -Achse symmetrischen Punkten T_0, \bar{T}_0 des Hauptprofils c_0 (Abb. 4). — Damit haben wir zwei einfache Erzeugungen der Fläche Φ als Hüllgebilde der leicht zu überblickenden Flächensachen (Γ) bzw. (Δ):

Satz 5. Durch eine axiale Ebenenverwandtschaft mit lotrechter Achse wird ein eigentliches Ebenenbündel, dessen Scheitel nicht der Achse angehört, in eine Fläche Φ transformiert, deren waagrechte Berührungszyylinder Γ untereinander ähnlich sind und deren umschriebene Böschungskegel Δ durchwegs Drehkegel sind, die ihre Spitzen auf dem die Achse rechtwinklig treffenden Bündelstrahl x haben. Die Fläche Φ ist mithin die Einhüllende von ∞^1 ähnlichen Horizontalzyldern Γ mit gemeinsamer Symmetrieebene, die zwei Böschungskegel Δ doppelt berühren, und ebenso die Einhüllende von ∞^1 Böschungskegeln Δ , die einen Horizontalzyylinder Γ doppelt berühren und ihre Spitzen auf einer zur Erzeugendenvorrichtung von Γ normalen Geraden x der waagrechten Symmetrieebene von Γ haben.

Die Berührungsline i eines Böschungskegels Δ mit der Fläche Φ kann als Grenzform zweier zusammenrückender Kegel Δ, Δ_1 angesehen werden und ist daher eine zur Ebene $\pi(z = 0)$ symmetrische Kurve 4. Ordnung, die die absoluten Punkte von π enthält und infolgedessen im Grundriß (Normalriff auf π) als Kreis erscheint. Dies läßt sich auch an Hand von Abb. 4 als Ergebnis der Konstruktionsvorschrift nach Abb. 2 bestätigen, ferner aus der analytischen Darstellung (4.4) für

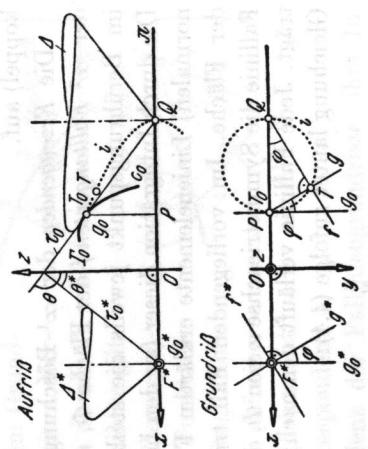


Abb. 4

$q = \text{const}$ ablesen. Im Aufriss (Normalriss auf die Symmetrieebene $y = 0$) erscheint die Berührungsquartik i als *Parabel*. Sie weist in der Kegelspitze Q einen Doppelpunkt auf, verläuft u. a. auf einer Kugel und ist im allgemeinen affin zu dem bekannten „Vivianischen Fenster“; im älteren Schriftum tritt diese doppelt-symmetrische rationale sphärische Quartik gelegentlich unter dem Namen „*Hippopede*“ (Pferdekoppel) auf.

Die Erzeugenden der ∞^1 Böschungskegels Δ bilden die Gesamtheit der ∞^2 Falltangenten f der Fläche Φ , also jener Flächentangenten, die im Berührungs punkt jeweils die steilste Fortschreitrichtung angeben. Die durch Integration dieser (zu den horizontalen Fortschreitrichtungen normalen) Linienelemente erklärten Flächenkurven sind die *Falllinien* der Fläche. Im vorliegenden Fall treffen sämtliche Tangenten einer Falllinie die Symmetrieebene x von Φ , die ja die Spitzen der Drehkegel Δ trägt. Jede Falllinie verläuft demnach in einer Ebene durch x und ihre Gleichung lautet zufolge (4.4):

$$\frac{y}{z} = -q \sin \varphi = \text{const.} \quad (4.6)$$

Satz 6. Die in Satz 5 gekennzeichneten Flächen Φ sind durch ebene Falllinien ausgezeichnet. Die Ebenen der Falllinien bilden ein Büschel, dessen Trägergerade der die Transformationssache rechtwinklig treffende Bindestrahl x ist.

Die Bestimmung sämtlicher Flächen mit ebenen Falllinien und die Untersuchung einer Anzahl von bemerkenswerten Sonderfällen hat der Verfasser in einer Reihe von Abhandlungen [4, 5, 6, 7] vorgenommen. Jene Flächen, deren Falllinien speziell in den Ebenen eines Büschels mit waagrechter Achse verlaufen, lassen sich offensichtlich in der hier geschilderten Weise durch Transformation eines Ebenenbündels mittels einer axialen Ebenenverwandtschaft gewinnen.

Zwischen der Gestalt der Falllinien und jener des *Hauptprofils* der Fläche Φ besteht nun ein überraschend einfacher, durch die *zyklographische Abbildung* vermittelter Zusammenhang. Sei T_0 ein laufender Punkt des Hauptprofils c_0 und f_0 die zugehörige Tangente (Abb. 5). Bezeichne ferner P den Fußpunkt des aus T_0 auf die Symmetrieebene x gefällten Lotes und Q den Schnittpunkt der Tangente f_0 mit x . Die dadurch induzierte Punkerverwandtschaft $\mathfrak{F}(P \rightarrow Q)$ auf der Achse x heiße die „*Subtangentialenkorrespondenz*“ des Hauptprofils. Eine auf c_0 ausgeübte orthogonale Affinität mit der

Achse x ($z' = \mu z$) würde die Subtangentialenkorrespondenz unverändert lassen. — Jede Erzeugende f des Böschungskegels Δ , der seine Spitze in Q hat, ist, wie wir wissen, eine Falltangente der Fläche Φ . Ihr Berührungs punkt T liegt auf der Berührungsstrecke i von Φ und Δ und erscheint daher im Grundriss auf dem Kreis über dem Durchmesser PQ . Die durch T gehende *Falllinie* sendet mithin im Grundriss ihre Tangente durch Q und ihre Normale durch P , während für die durch T gehende *Schichtenlinie* das Umgekehrte gilt. Versteht man unter der „*Begleitkorrespondenz*“ einer ebenen Kurve jene Punktverwandtschaft, die zusammengehörige Normalen und Tangenten der Kurve auf einer festen Achse ausschneiden [8, 9], dann ist offenbar die vorhin erklärte Korrespondenz $\mathfrak{F}(P \rightarrow Q)$ die Begleitkorrespondenz der Fallliniengrundrisse, ihre Inverse $\mathfrak{F}^{-1}(Q \rightarrow P)$ hingegen die Begleitkorrespondenz der Schichtenliniengrundrisse.⁴

Satz 7. Die auf der Symmetrieebene x der Fläche Φ aus Satz 5 vorhandene Subtangentialenkorrespondenz des Hauptprofils ist die Begleitkorrespondenz der Fallliniengrundrisse und zugleich die inverse Begleitkorrespondenz der Schichtenliniengrundrisse von Φ .

Wir betrachten jetzt die *zyklographische Abbildung* des Hauptprofils c_0 auf die Grundebene $\pi(z = 0)$, die dadurch zustandekommt, daß man von jedem Profilpunkt T_0 einen Böschungskegel mit festem Öffnungswinkel 2ω ausstrahlen läßt (Abb. 5). Der geeignete orientierte Basiskreis eines solchen Kegels gilt als „Bildzykel“ T_0^* des Punktes T_0 die Einhüllende der ∞^1 Zyklen T_0^* als *zyklographische Bildkurve* c_0^* der Kurve c_0 . Läßt man einen Punkt die zu T_0 gehörige Tangente f_0 von c_0 durchlaufen, so erhält man als Einhüllende seines Bildzykels ein vom Spurpunkt Q der Tangente ausgehendes (orientiertes) Geradepaar f_0^* , das c_0^* an denselben Stellen wie T_0^* berührt [10]. Die zyklographische Bildkurve c_0^* besitzt mithin ebenfalls die Begleitkorrespondenz $\mathfrak{F}(P \rightarrow Q)$

⁴ Die Bedeutung der Begleitkorrespondenz des Meridiants einer Drehfläche für die Umrisskurven und für die geodätischen Linien der Drehfläche setzte der Verfasser bei früherer Gelegenheit auseinander [8, 9]. In [8] findet man auch die Ermittlung der zu einer gegebenen Begleitkorrespondenz gehörigen Kurvenschar.

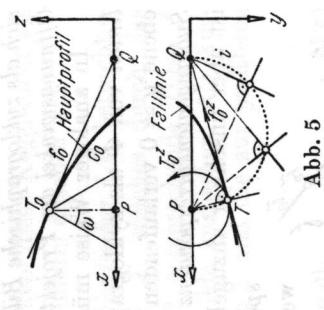


Abb. 5

und ist daher mit dem Grundriß einer *Falllinie* von Φ identisch. Indem man dem verwendeten Öffnungswinkel 2ω der Projektionskegel verschiedene Werte erteilt, kann man auf diese Weise sämtliche Falllinien von Φ im Grundriß auf einfachste Weise konstruieren⁵.

Satz 8. Die Grundrisse der Falllinien der Fläche Φ aus Satz 5 lassen sich als zyklographische Bilder des Hauptprofils der Fläche für verschiedene Öffnungswinkel der Projektionskegel deuten.

In analoger Weise müssen sich auch die Grundrisse der *Schichtenlinien* von Φ als zyklographische Bildkurven einer in der Hauptprofil-ebene $y = 0$ verlaufenden Kurve \tilde{c}_0 auffassen lassen, welche die *inverse Subtangentialenkorrespondenz* $\mathfrak{F}^{-1}(Q \rightarrow P)$ aufweist. Eine solche Kurve \tilde{c}_0 ist aber unschwer anzugeben, indem man auf das Hauptprofil c_0 jene spezielle Korrelation $T_0 \rightarrow \tilde{t}_0, t_0 \rightarrow \tilde{f}_0$ anwendet, welche durch

$$\tilde{z} = m(x - \tilde{x}) \quad (4.7)$$

definiert wird. Diese Korrelation, deren Konstruktionsvorschrift aus Abb. 6 zu ersehen ist, besitzt die x -Achse als ausgeartetes Punktkerngebilde und kehrt die Subtangentialenkorrespondenz einer Kurve tatsächlich um.

Satz 9. Die Grundrisse der Schichtenlinien der Fläche Φ aus Satz 5 lassen sich als zyklographische Bilder einer zum Hauptprofil der Fläche korrelativen Kurve in der Hauptprofilebene deuten.

Ist das Hauptprofil c_0 beispielsweise ein zur x -Achse symmetrischer *Kegelschnitt*, dann ist auch die korrelative Kurve \tilde{c}_0 von gleicher Art. Die zyklographischen Bilder solcher Kurven für verschiedene Öffnungs-winkel 2ω der Projektionskegel sind bekanntlich *konfokale Kegelschritte* [10]. Damit bestätigt sich die bereits von L. Eckhart [2] auf anderem Wege bewiesene Tatsache, daß die zugehörigen Flächen Φ – die wie im Spezialfall (1.4) von 4. Ordnung sind – Kegelschnitte zu Fall- und Schichtenlinien haben.

Betrachten wir jetzt die ∞^1 Erzeugenden l^* eines dem Bündel F^* angehörenden *Böschungskegels* A^* (Öffnungswinkel 2δ): Als Trägergeraden von Ebenenbüscheln aufgefaßt, entsprechen ihnen ∞^1 der Fläche Φ umschriebene Torsen A von der in Abschnitt 3 geschilderten

⁵ Die durch die zyklographische Abbildung erklärte Zuordnung $f_0 \rightarrow f_0''$ ist eine zweizeilige quadratische Strahlverwandtschaft zwischen den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ [8].

Art. Da je zwei gegen die Transformationsachse z gleich geneigte und zu ihr windschiefe Geraden durch eine Ähnlichkeit $\mathfrak{Y} \in \mathfrak{G}_3$ verknüpft sind, die gemäß Satz 1 auch die entsprechenden Torsen ineinander überführt, so sind die ∞^1 Torsen A durchwegs *ähnlich*; auszunehmen wären nur jene beiden Kegel, die den beiden die Achse z treffenden Erzeugenden von A^* zugeordnet sind, wenn man diese Kegel nicht als „unendlich starke“ Verkleinerungen der Torsenform ansiehen will.

Zur näheren Kennzeichnung der *Ähnlichkeitsschar* (A) betrachten wir jenes *ähnlich-veränderliche Raumsystem* Σ , welches durch das Geradenpaar (zl^*) repräsentiert wird; die l^* entsprechende Torse A ist dabei ebenfalls als Σ angehörendes Gebilde anzusehen. Als Ausgangslage gelte jenes „Soma“, Σ_0 , das durch z und die zur yz -Ebene parallele Kegelerzeugende l_0^*

$$x = 1, \quad z = cy \quad (c = \operatorname{ctg} \delta) \quad (4.8)$$

repräsentiert wird. Die Ähnlichkeitstransformation \mathfrak{Y} , die $\Sigma_0(zl_0^*)$ in $\Sigma(zl^*)$ – und damit auch die durch (3.4) dargestellte Torse A_0 in A – überführt, setzt sich zusammen aus einer Drehung um z durch einen Winkel σ , einer zentrischen Verkleinerung mit dem Maßstabsfaktor $\cos \sigma$ vom Ursprung aus und einer Schiebung längs z um den Betrag $c \sin \sigma$. Die Darstellung in Zylinderkoordinaten φ, r, z lautet daher:

$$\varphi = \varphi_0 + \sigma, \quad r = r_0 \cos \sigma, \quad z = z_0 \cos \sigma + c \sin \sigma. \quad (4.9)$$

Die kartesische Darstellung schreibt sich:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos^2 \sigma - y_0 \sin \sigma \cos \sigma, \\ y &= x_0 \sin \sigma \cos \sigma + y_0 \cos^2 \sigma, \\ z &= z_0 \cos \sigma + c \sin \sigma. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die dadurch beschriebene, die Lagenfolge (Σ) liefernde „Bewegung“ des ähnlich-veränderlichen Systems hat folgende, leicht zu bestätigende Eigenschaften:

- a) Sie läßt die z -Achse fest.
- b) Die Punktbahnen sind rationale sphärische Kurven 4. Ordnung, und zwar zur xy -Ebene symmetrische *Hippopoden* (s. o.); ein Punkt $P_0(p_0, r_0, z_0)$ läuft nämlich auf einem (die z -Achse enthaltenden) Drehzylinder $r = r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$, so zwar, daß er während eines doppelten gleichförmigen Umlaufs eine volle harmonische Schwingung in Achsen-

richtung ausführt⁶. Sämtliche Bahnkurven enthalten im übrigen die beiden Achsenpunkte $z = \pm c$ ($\sigma = \pm \pi/2$).

c) Achsenparallele Ebenen durchlaufen *Ebenenbüschel*, gegen die Achse geneigte Ebenen umhüllen *Drehkegel* mit z-parallel er Achse, die ihre Spitzen in der xy -Ebene haben.

d) Achsenparallele Geraden beschreiben *Drehzyylinder*, die die Achse enthalten; achsennormale Geraden erzeugen spezielle *Kugelkonoide*, deren Leitgerade die Leitkugel berührt (Strahlfläche 4. Ordnung VII. Art nach R. Sturm⁷); zur Achse schräge Geraden überstreichen Strahlflächen 4. Ordnung V. Art, deren Doppellinie aus einem Kreis der xy -Ebene und einer achsenparallelen Treffergeraden desselben besteht. Für gewisse, ein Dreiecknetz erfüllende Ausnahmsgeraden schrumpft der Doppelkreis auf einen Punkt zusammen und die Bahnfläche reduziert sich auf einen *Drehkegel*.

Kehren wir jetzt wieder zu den Ähnlichkeitsscharen der Fläche Φ unschriebenen Torsen A zurück, welche jeweils den Erzeugenden ν^* eines dem Bündel F^* angehörenden Böschungskegels Δ^* entsprechen. Den ∞^1 derartigen Kegeln entsprechend, treten zunächst ∞^1 solche Ähnlichkeitsscharen (A) auf. Nun ist aber die Fläche Φ bereits durch ihr Hauptprofil c_0 mit dessen Symmetrieachse x vollkommen bestimmt, während die Transformationsachse z noch auf ∞^1 Arten gewählt werden kann: Hieraus folgt, daß die Fläche sogar ∞^2 Ähnlichkeitsscharen unschriebener Torsen besitzen muß.

Satz 10. Jede vermöge einer axialen Ebenenverwandtschaft auf ein Ebenenbündel abbildbare Fläche Φ besitzt ∞^2 Ähnlichkeitsscharen unschriebener Torsen, wobei im Rahmen jeder solchen Ähnlichkeitsschar die Ortslinien homologer Punkte Hippopeden und die Hüllgehinde homologer Ebenen achsenparallele Drehkegel sind.

Als Grenzform ist in dem System der Ähnlichkeitsscharen (A) auch die in Satz 5 erwähnte Schar der achsennormalen Berührungszyylinder T enthalten.

⁶ Eine allgemeine Untersuchung des „harmonischen Umschwungs“, jener Bewegung eines starren Raumsystems, die sich aus einer gleichförmigen Drehung um eine Achse und einer harmonischen Schwingung längs dieser Achse zusammensetzt, hat W. Kautny [11, 12] durchgeführt.

⁷ „Umschwingungswendelfläche“, der Frequenz 1 nach W. Kautny [12]; diese Fläche ist nebenbei durch ebene Fallimien (= Ellipsen) ausgezeichnet [5].

⁸ „Schiefe geschlossene Umschwingungsstrahlfläche“ der Frequenz 1 nach W. Kautny [12].

Die *homologen Erzeugenden* der Torsen einer Ähnlichkeitsschar (A) ordnen sich zufolge d) zu ∞^1 speziellen *Strahlflächen* 4. Grades Ψ an. Eine solche Strahlfläche ist der Fläche Φ jeweils längs einer der früher erwähnten *Hippopeden* i angeschrieben, in der Φ von einem der Böschungskegel Δ berührt wird (nämlich von jenem Kegel, der von der zur betrachteten Torsenerzeugenden gehörigen Tangentialebene eingehüllt wird). Trotz der ∞^2 nachgewiesenen Ähnlichkeitsscharen (A) existieren für eine Fläche Φ nicht ∞^3 , sondern bloß ∞^2 unschriebene Strahlflächen Ψ ; jede ist ja durch die Berührungskegelpuppe i (die gleichzeitig den Berührungskegel Δ festlegt) und die Neigung der Erzeugenden vollkommen bestimmt. Von den ∞^2 Flächen Ψ sind nun jeweils jene ∞^1 , welche dieselbe Erzeugendenneigung besitzen, untereinander *ähnlich*: Hieraus folgt somit für die Fläche Φ das Vorhandensein eines weiteren Systems von ∞^1 Ähnlichkeitsscharen unschriebener Flächen, diesmal jedoch nicht aus Torsen, sondern aus *windschiefen Strahlflächen* 4. Grades bestehend; eine der Scharen, nämlich die durch verschwindende Erzeugendenneigung gekennzeichnete, besteht insbesondere aus den unter d) genannten speziellen Kugelkonoiden⁹.

5. Die Eckartsche Grenzform der Steinerschen Römerfläche
Zur Illustration der allgemeinen Entwicklungen sei als einfachstes Beispiel jene Fläche $\Phi(\tau)$ näher betrachtet, welche durch die in Abschnitt 1 erwähnte „axiale Ebeneninversion“

$$\text{unten befindet } \Phi \text{ erhält man } qq^* = -1 \quad (\tau \perp \tau^*) \quad (5.1)$$

auf ein Ebenenbündel $F^*(\tau^*)$ abgebildet wird. Der Bündelscheitel werde, wie vorgesehen, im Punkt $F^*(1, 0, 0)$ angenommen. Die zur Transformation (5.1) gehörigen Hilfsfunktionen sind gemäß (2.4):

$$H(q) = \frac{q}{q^*} = -q^2, \quad h^*(q^*) = \frac{q^*}{q} = -q^{*2}. \quad (5.2)$$

Zufolge (4.1) lautet die Gleichung der Fläche Φ in inhomogenen Ebenenkoordinaten

$$uw^2 + u^2 + v^2 = 0, \quad (5.3)$$

⁹ Die Existenz dieses Systems von Ähnlichkeitsscharen unschriebener Strahlflächen 4. Grades Ψ ist für die in Rede stehenden Flächen Φ keineswegs charakteristisch, sondern offenbar bei jeder Fläche festzustellen, die die Einhüllende einer eparametrischen Mannigfaltigkeit von Böschungskegeln ist, deren Spitzen einer Horizontalebene angehören.

in kartesischen Punktkoordinaten hingegen — etwa aus der Parameterdarstellung (4.4) zu gewinnen —

$$z^4 - 4xz^2 - 4y^2 = 0. \quad (5.4)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß es sich um eine *algebraische Fläche 3. Klasse und 4. Ordnung* handelt, und zwar um eine *Grenzform der Steinerschen Römerfläche*, deren ausgeartetes Fundamentaltaetraeder aus den Minimalebenen $x \pm iy = 0$ und der doppelt zuzählenden Fernebene besteht.

Das *Hauptprofil* c_0 der Fläche wird von der zur x -Achse symmetrischen *Parabel*

$$z^2 = 4x, \quad y = 0 \quad (5.5)$$

dargestellt. Die *Schichtenlinien* $z = \text{const}$ sind *Parabeln*, die im Schichtenplan (Normalriss auf die xy -Ebene) eine *konfokale Schar* mit dem gemeinsamen Brennpunkt im Ursprung bilden; bei Beschränkung auf reelle Koten z enthält der Schichttempian nur die nach der positiven Seite der x -Achse geöffneten Individuen. Die nach der negativen Seite offenen Parabeln fügen sich als Orthogonaltrajektorien ein und stellen die Grundrisse der *Falllinien* $y/z = \text{const}$ (reell) dar. Die Grundrisse der Fallparabeln können nach Satz 8 als zyklographische Bilder der Hauptprofilparabel (5.5) aufgefaßt werden, die Grundrisse der Schichtenparabeln hingegen in Übereinstimmung mit Satz 9 als zyklographische Bilder der korrelativen Parabel $\tilde{z}^2 = -4\tilde{x}$, $y = 0$, wenn man in (4.7) $m = 2$ nimmt.

Anschauliche Bilder dieser schon bei L. Eckhart [2] und K. Strubecker [3] erwähnten, jedoch nicht näher untersuchten Fläche Φ findet man in den Abhandlungen [5, 6, 7] des Verfassers, ebenso gewisse bis dahin noch nicht bemerkte Eigenschaften dieser interessanten Fläche, u. a. ihre mehrfache Erzeugbarkeit als *Bewegfläche* [6].

Die zur vorliegenden Erzeugung der Fläche Φ mittels der kubischen axialen Ebenenverwandtschaft (5.1) gehörigen ∞^1 Ähnlichkeitsscharen umschriebener Torsen A bestehen aus *Torsen 3. Klasse*, wenn man von den parabolischen Zylindern $I(c = 0)$ absieht. Das der Bündelgeraden l_0^* (3.1) entsprechende Torsenprototyp A_0 wird gemäß (3.4) von der Ebenenscharr

$$-\lambda x + cy + (\lambda^2 + c^2)z = \lambda(x^2 + c^2), \quad c \neq 0 \quad (5.6)$$

eingehtüllt. Die *Gratlinie* dieser Torse ist die *kubische Parabel*

$$x = 3\lambda^2 - c^2, \quad y = \frac{\lambda^3}{c} - 3c\lambda, \quad z = 3\lambda. \quad (5.7)$$

in kartesischen Punktkoordinaten hingegen — etwa aus der Parameterdarstellung (4.4) zu gewinnen —

$$z^4 - 4xz^2 - 4y^2 = 0. \quad (5.4)$$

Hieraus ist zu ersehen, daß es sich um eine *algebraische Fläche 3. Klasse und 4. Ordnung* handelt, und zwar um eine *Grenzform der Steinerschen Römerfläche*, deren ausgeartetes Fundamentaltaetraeder aus den Minimalebenen $x \pm iy = 0$ und der doppelt zuzählenden Fernebene besteht.

Das *Hauptprofil* c_0 der Fläche wird von der zur x -Achse symmetrischen *Parabel*

$$z^2 = 4x, \quad y = 0 \quad (5.5)$$

dargestellt. Die *Schichtenlinien* $z = \text{const}$ sind *Parabeln*, die im Schichtenplan (Normalriss auf die xy -Ebene) eine *konfokale Schar* mit dem gemeinsamen Brennpunkt im Ursprung bilden; bei Beschränkung auf reelle Koten z enthält der Schichttempian nur die nach der positiven Seite der x -Achse geöffneten Individuen. Die nach der negativen Seite offenen Parabeln fügen sich als Orthogonaltrajektorien ein und stellen die Grundrisse der *Falllinien* $y/z = \text{const}$ (reell) dar. Die Grundrisse der Fallparabeln können nach Satz 8 als zyklographische Bilder der Hauptprofilparabel (5.5) aufgefaßt werden, die Grundrisse der Schichtenparabeln hingegen in Übereinstimmung mit Satz 9 als zyklographische Bilder der korrelativen Parabel $\tilde{z}^2 = -4\tilde{x}$, $y = 0$, wenn man in (4.7) $m = 2$ nimmt.

Anschauliche Bilder dieser schon bei L. Eckhart [2] und K. Strubecker [3] erwähnten, jedoch nicht näher untersuchten Fläche Φ findet man in den Abhandlungen [5, 6, 7] des Verfassers, ebenso gewisse bis dahin noch nicht bemerkte Eigenschaften dieser interessanten Fläche, u. a. ihre mehrfache Erzeugbarkeit als *Bewegfläche* [6].

Die zur vorliegenden Erzeugung der Fläche Φ mittels der kubischen axialen Ebenenverwandtschaft (5.1) gehörigen ∞^1 Ähnlichkeitsscharen umschriebener Torsen A bestehen aus *Torsen 3. Klasse*, wenn man von den parabolischen Zylindern $I(c = 0)$ absieht. Das der Bündelgeraden l_0^* (3.1) entsprechende Torsenprototyp A_0 wird gemäß (3.4) von der Ebenenscharr

$$-\lambda x + cy + (\lambda^2 + c^2)z = \lambda(x^2 + c^2), \quad c \neq 0 \quad (5.6)$$

eingehtüllt. Die *Gratlinie* dieser Torse ist die *kubische Parabel*

$$x = 3\lambda^2 - c^2, \quad y = \frac{\lambda^3}{c} - 3c\lambda, \quad z = 3\lambda. \quad (5.7)$$

Eine nähere Untersuchung, die hier nicht wiedergegeben werden soll, zeigt, daß sämtliche Torsen der von A_0 vermöge (4.10) erzeugten Ähnlichkeitsschar (1) der Römerfläche Φ längs *Parabeln* angeschrieben sind, die sich im Grundriß auf eine Drehsschar von kongruenten Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt im Ursprung abbilden. Als Hüllebilde der Torsenschar (1) wird demnach die Fläche Φ nicht in ihrer ganzen Ausdehnung erfaßt, sondern (in reeller Weise) nur im Außengebiet des koaxialen Drehzyinders $x^2 + y^2 = c^4$. Der fehlende, von einer Hippopede begrenzte Kern ist in Abb. 5 der Arbeit [7] zu sehen. — Die ∞^1 Ähnlichkeitsscharen kubischer Torsen werden durch die automorphen Affinitäten

$$x' = t^2x, \quad y' = t^2y, \quad z' = tz \quad (5.8)$$

der Römerfläche, die eine eingliedrige Gruppe bilden [6], untereinander vertauscht.

Die weiteren ∞^2 Ähnlichkeitsscharen umschriebener Torsen ergeben sich, wenn man (bei unverändertem Hauptprofil) die Transformationsachse z verschiebt. Dies läuft auf das gleiche hinaus, wie wenn man bei unveränderter z -Achse das Hauptprofil verschiebt, also statt durch (5.5) durch

$$z^2 = 4(x - a), \quad y = 0 \quad (5.9)$$

festlegt. An Stelle der birationalen Elementarkorrespondenz (5.1) tritt dann die für $a \neq 0$ einzuweidige Korrespondenz

$$q^2q^* + q - aq^* = 0. \quad (5.10)$$

Die hier von abgeleiteten Hilfsfunktionen lauten

$$h(q) = a - q^3, \quad h^*(q^*) = \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1 + 4aq^{*2}}). \quad (5.11)$$

Die zu einem beliebigen $a \neq 0$ gehörige Ähnlichkeitsschar (1) besteht jetzt aus *Torsen 4. Klasse I. Art*, deren Ausgangsform A_0 gemäß (3.4) als Einküllende des einparametrischen Ebenensystems

$$u = H(\lambda), \quad v = -\frac{c}{\lambda}H(\lambda), \quad w = \frac{1}{\lambda} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4a}{\lambda^2 + c^2}} \right) \quad (5.12)$$

erhalten wird. Eine lineare Relation zwischen den Ebenenkoordinaten u, v, w führt in der Tat nach kurzer Umformung auf eine Gleichung

4. Grades in λ . — Das lineare System $II + \varrho \Theta = 0$ von Flächen

2. Klasse, das die Tore \mathcal{A}_4 Klasse \mathcal{A}_0 als Hülle besitzt, mag durch das in Abschnitt 3 (Satz 4) erwähnte hyperbolische Paraboloid

$$\Pi \equiv cuv + v = 0 \quad (5.13)$$

und die Quadrik

$$\varPhi \equiv au^2 + av^2 - w^2 + cvw - u = 0 \quad (5.14)$$

aufgespannt werden. Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet

$$(q^2 + 1)(c^2 q^2 + c^2 + 4a) = 0. \quad (5.15)$$

Von den vier Doppelkegelschnitten der Tore \mathcal{A}_0 sind mithin zweistets konjugiert-imaginär ($q = \pm i$), und die beiden restlichen fallen nur für $c^2 + 4a \leq 0$ reell aus. Im Falle des Gleichheitszeichens sind diese Doppelkegelschnitte vereinigt und die Schar (\mathcal{A}) besteht dann aus rationalen Toren 4. Klasse.

Auf die Berührungslien der Toren 4. Klasse mit der Römerfläche \varPhi und die Grenzen der von einer Torsenschar (\mathcal{A}) reell erfaßten Flächenzonen auf \varPhi soll hier nicht eingegangen werden.

Auf die Ortslinien der Fließpunkte Π auf \varPhi soll hier nicht eingegangen werden.

Literatur

- [1] E. Müller: Die achsiale Inversion. Jber. DMV **25** (1916), 209–251.
- [2] L. Eichhart: Über Flächen vierter Ordnung, deren Fallninen Kegelschnitte sind. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **131** (1922), 417–427.
- [3] K. Strubecker: Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **140** (1931), 545–578.
- [4] W. Wunderlich: Flächen mit ebenen Fallninen. Monatsh. **65** (1961), 291–300.
- [5] W. Wunderlich: Flächen mit Kegelschnitten als Fallninen. J. reine angew. Math. **208** (1961), 204–220.
- [6] W. Wunderlich: Römerflächen mit ebenen Fallninen. Annali Mat. pura appl. **57** (1962), 97–108.
- [7] W. Wunderlich: Betrag- und Potentialflächen mit ebenen Fallninen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien **170** (1962), 105–120.
- [8] W. Wunderlich: Zur Geometrie der Drehflächen und ihrer geodätischen Linien. Monatsh. Math. **57** (1953), 199–216.
- [9] W. Wunderlich: Aufgabe 190. Elem. Math. **8** (1953), 117; Lösung ebenda **9** (1954), 113–115.
- [10] E. Müller-J. Krames: Die Zyklographie (Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. II), Leipzig/Wien 1929.
- [11] W. Kantny: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. **60** (1956), 66–82.
- [12] W. Kantny: Über die durch harmonischen Umschwingung erzeugbaren Strahlflächen. Monatsh. Math. **63** (1959), 169–188.