[redacted]

Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XIV, 1963 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 3

Zur Geometrie der Potenzbetragflächen

Prof. HERMANN SCHMIDT zum 60. Geburtstag

Von
WALTER WUNDERLICH

[redacted]

Zur Geometrie der Potenzbetragflächen

Prof. Hermann Schmidt zum 60. Geburtstag

Von

Walter Wunderlich

1. Als *Betragfläche* wird jene der Veranschaulichung einer komplexen analytischen Funktion $w(z)$ dienende Diagrammfläche bezeichnet, die in der Weise entsteht, daß in jedem Punkt (x, y) der waagrecht gedachten z-Ebene eine lotrechte Strecke der Länge $h = |w(x + iy)|$ errichtet wird; der Ort der so erreichten Raumpunkte (x, y, h) ist die Betragfläche für $w(z)$. Die aus ihr durch Horizontalebenen ausgeschnittenen *Schichtenlinien* $h =$ const geben einen Überblick über die Verteilung der Stellen *gleichen Funktionsbetrages* $|w| =$ const; die die Schar der Schichtenlinien rechtwinklig durchsetzenden *Fallinien* lassen wiederum die Verteilung der Stellen *gleichen Funktionsarguments* $\arg w = \psi$ erkennen. Das dem orthogonalen Polarkoordinatennetz $h =$ const, $\psi =$ const der w-Ebene vermöge der konformen Abbildung $w \to z$ zugeordnete Orthogonalnetz in der z-Ebene stellt den Grundriß des rechtwinkligen Schichten-Falliniennetzes der Betragfläche dar — gewissermaßen eine Landkarte des Betragreliefs — und gestattet bei entsprechender Bezifferung für jede Stelle z den zugehörigen Funktionswert w abzulesen.

In einer dem differentialgeometrischen Verhalten solcher Betragflächen gewidmeten Arbeit [1] hat E. Ullrich vor allem die Gaußsche Krümmung K dieser Flächen betrachtet und festgestellt, daß innerhalb einer weiten Klasse von analytischen Funktionen die *Potenzfunktionen*

$$w = (az + b)^{\alpha + i\beta} \tag{1}$$

die einzigen Funktionen mit *einsinnig gekrümmten Betragflächen* ($K \geqq 0$ oder $K \leqq 0$) sind; nur für $K \equiv 0$ tritt noch die Exponentialfunktion $w = \exp(az + b)$ hinzu[1]).

Die angeschlossene morphologische Untersuchung der *Potenzbetragflächen*, die sich nach Anwendung einer einfachen Ähnlichkeitstransformation auf die Normalform

$$w = z^\gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \alpha + i\beta \tag{2}$$

stützt, hebt drei charakteristische Familien von Flächenkurven hervor: a) Die Horizontalschnitte (Schichtenlinien) $h =$ const; sie sind im allgemeinen logarithmische

1) Die erwähnte Klasse von analytischen Funktionen $w(z)$ wird dadurch gekennzeichnet, daß für den Differentialausdruck w'^2/ww'' der Satz von Liouville anwendbar sein soll, so daß aus der Beschränktheit des Wertevorrats dieses Ausdrucks auf seine Konstanz geschlossen werden darf.

Spiralen, im besonderen Gerade für $\alpha = 0$ und Kreise für $\beta = 0$. b) Die Meridianschnitte $\arg z = \text{const}$; sie sind im allgemeinen höhere Parabeln oder Hyperbeln, im besonderen Gerade für $\alpha = 0$ oder 1. c) Die Zylinderschnitte $|z| = \text{const}$; sie sind im allgemeinen transzendente Kurven, die bei Verebnung des Zylindermantels in Exponentialkurven übergehen, im besonderen Kreise für $\beta = 0$. — In einer zweiten Mitteilung [2] werden die Durchdringungskurven zweier koaxialer Potenzbetragflächen betrachtet; für diese bemerkenswerten Raumkurven, die im Grundriß als logarithmische Spiralen erscheinen, wird der Name „Spirella" vorgeschlagen.

H. Schmidt hat ferner bemerkt [3], daß die Potenzbetragflächen im allgemeinen *Spiralflächen* sind (im besonderen Drehflächen für $\beta = 0$ und Kegel für $\alpha = 1$), und daß sie durch diese Eigenschaft sogar charakterisiert werden können.

Die vorliegende Note will vor allem darauf hinweisen, daß alle Potenzbetragflächen dadurch ausgezeichnet sind, daß sie eine *zweiparametrige Gruppe von projektiven (affinen) Transformationen* gestatten, womit ihre bisher bekannten und manche weiteren geometrischen Eigenschaften sich einem gemeinsamen Gesichtspunkt unterordnen. Bemerkungen über die bei Parallelprojektion auftretenden Umrißlinien und über die Ortslinien $K = \text{const}$ bilden den Schluß.

2. Geht man mittels $z = r \cdot e^{i\varphi}$ zu *Zylinderkoordinaten* r, φ, h über, so lautet die Gleichung der zu (2) gehörigen Potenzbetragfläche F_γ:

$$h = r^\alpha e^{-\beta\varphi}. \tag{3}$$

Diese Fläche gestattet offensichtlich die nachstehenden *Transformationen* T:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \lambda, \\ r &= \mu r_0, \\ h &= \nu h_0, \quad \text{wobei} \quad \nu = \mu^\alpha e^{-\beta\lambda}. \end{aligned} \tag{4}$$

Jede derartige Transformation setzt sich zusammen aus einer Drehung um die h-Achse (Drehwinkel λ), einer Streckung von der Achse aus (Faktor μ) und einer Streckung der Höhen (Faktor ν). Es handelt sich mithin um eine spezielle räumliche *Affinität*, welche die h-Achse in sich überführt und die Horizontalebenen untereinander vertauscht. Fixebenen sind außer der Fernebene die Grundebene $h = 0$ und die beiden Minimalebenen $x \pm iy = 0$; Fixpunkte der Ursprung O, der Fernpunkt U der h-Achse und die absoluten Punkte I, J der Grundebene.

Die ∞^2 Affinitäten T, unterscheidbar durch die wesentlichen Parameter λ und μ, bilden eine *zweigliedrige kommutative Gruppe* Γ. Die Fläche F_γ gehört mithin zu den von F. Klein und S. Lie eingeführten „*W-Flächen*" [4], welche gegenüber einer zweigliedrigen Gruppe von projektiven Transformationen invariant sind. Die Potenzbetragflächen stellen ein metrisch ausgezeichnetes Seitenstück zu den in diesem Zusammenhang mit Vorliebe betrachteten W-Flächen $x^a y^b h^c = \text{const}$ dar, wie aus der kartesischen Gleichung $h^2 = (x + iy)^{\alpha + i\beta} (x - iy)^{\alpha - i\beta}$ zu ersehen ist.

Bei n-maliger Iteration einer Einzeltransformation $T(\lambda, \mu)$ erhält man die Transformation $T^n(n\lambda, \mu^n)$. Die zugehörige (kontinuierliche) *eingliedrige Untergruppe* G

wird mithin bei Einführung von $n\lambda = t$ als Gruppenparameter beschrieben durch

$$(5)\qquad \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + t, \\ r &= r_0 \cdot e^{pt}, \\ h &= h_0 \cdot e^{qt}, \qquad \text{wobei } q = \alpha p - \beta. \end{aligned}$$

Die Darstellung (5) gibt gleichzeitig die *Bahnkurve* an, die ein beliebiger Punkt $P_0(r_0, \varphi_0, h_0)$ unter der Einwirkung der betreffenden Untergruppe G_p durchläuft. Diese Bahnkurven, die gewissen Drehflächen $r^q h^{-p} = \text{const}$ angehören und im Grundriß als logarithmische Spiralen $re^{-p\varphi} = \text{const}$ erscheinen, sind nichts anderes als die vorhin erwähnten ULLRICHschen „*Spirellen*“ [2], welche sich hiermit als *metrisch spezielle W-Kurven* im Sinne von KLEIN und LIE [4] erweisen. Jede dieser Kurven gehört im übrigen auch einer Wendelspiralfläche $he^{-q\varphi} = \text{const}$ an [5].

Unter den ∞^1 Scharen solcher Bahnkurven sind einige ausgezeichnete, zu speziellen Untergruppen G_p gehörige hervorzuheben:

a) $p = \beta/\alpha$ $(q = 0)$. Die Bahnkurven (5) dieser Untergruppe sind die *Schichtenlinien* $h = \text{const}$ der Fläche F_γ. Da bei dieser Gruppe jeder Punkt der h-Achse fest bleibt, sind die Schichtenlinien gleichzeitig die *Berührungslinien der der Fläche aus den Achsenpunkten umschriebenen Kegel*. Die Schichtenlinien sind im allgemeinen *logarithmische Spiralen* mit dem konstanten Schnittwinkel arctg (α/β), die für $\alpha = 0$ zu Geraden ausarten ($F_{\beta i}$ = Wendelspiralfläche), für $\beta = 0$ hingegen zu Kreisen (F_α = Drehfläche). Unter Ausschluß dieser beiden Grenzfälle folgt aus der Kongruenz der Schichtenlinien, daß die Potenzbetragflächen für $\alpha\beta \neq 0$ *Bewegflächen* sind, die durch schraubenartige Bewegung einer logarithmischen Spirale erzeugbar sind; die Bahnen der einzelnen Punkte sind dabei die unter 1c) und 2d) genannten Zylinderschnitte $r = \text{const}$.

b) $p = -\alpha/\beta$. Als Bahnkurven dieser Untergruppe stellen sich die *Fallinien* der Fläche F_γ ein. Die im Grundriß auftretenden logarithmischen Spiralen weisen nämlich den Schnittwinkel arctg $(-\beta/\alpha)$ auf, durchsetzen daher den Schichtenplan orthogonal.

c) $p = q = \beta/(\alpha - 1)$. Hier besteht die Untergruppe G_p (5) aus Ähnlichkeitstransformationen, womit die Fläche F_γ als *Spiralfläche* zu erkennen ist [3], abgesehen von den Grenzfällen $\alpha = 1$ (Kegel) und $\beta = 0$ (Drehfläche). Die zugehörigen Bahnkurven sind im allgemeinen Fall die bekannten *zylindro-konischen Spiralen* (Drehkegelloxodromen), die als Böschungslinien auf Drehkegeln mit lotrechter Achse erklärt werden können [5]. Da bei dieser Gruppe die Neigung einer Ebene gegen die Waagrechte unverändert bleibt, stellen die Bahnspiralen (und ihre Grenzformen) gleichzeitig die *Berührungslinien der der Fläche umschriebenen Böschungstorsen* dar.

d) $p = 0$ $(q = -\beta \neq 0)$. Die hier auftretenden Bahnkurven (5) sind die schon unter 1c) und 2a) erwähnten *Zylinderschnitte* $r = \text{const}$. Sie gehen durch eine Kollineation, welche die Grundebene $h = 0$ ins Unendliche wirft und die Drehzylinder $r = \text{const}$ in koaxiale Drehkegel verwandelt, in zylindro-konische Spiralen über.

e) $p = \infty$. Führt man in (5) zunächst den Parameterwechsel $e^{pt} = u$ durch, so gelangt man anschließend mit $p \to \infty$ zur modifizierten Darstellung $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0 u$,

$h = h_0 u^\alpha$. Die Bahnkurven dieser Untergruppe liefern die *Meridiane* $\varphi =$ const der Fläche F_γ. Da bei dieser Gruppe die Ferngerade der (waagrechten) Grundebene punktweise festbleibt, so sind die Meridiane gleichzeitig die *Berührungslinien der der Fläche umschriebenen Horizontalzylinder*. Die auftretenden, untereinander ähnlichen Meridiane $h = c \cdot r^\alpha$ sind für $\alpha > 0$ im allgemeinen „höhere" *Parabeln* (gewöhnliche Parabeln für $\alpha = 2$ und $1/2$, Gerade für $\alpha = 0$ und 1), für $\alpha < 0$ hingegen höhere *Hyperbeln* (gewöhnliche gleichseitige Hyperbeln für $\alpha = -1$).

f) $p = q/2 = \beta/(\alpha - 2)$. Die Bahnkurven (5) der zugehörigen Untergruppe verlaufen auf *Drehparaboloiden* $h = cr^2$ und können daher, wenn man eines dieser invarianten Paraboloide zur Maßfläche einer *nichteuklidischen Metrik* von Cayley-Kleinschem Typ erklärt, als *hyperbolische Schraublinien* angesehen werden. Sie sind, von den trivialen Grenzfällen $\alpha = 2$ (Meridianparabeln) und $\beta = 0$ (Parallelkreise) abgesehen, kollinear zu den bekannten Kugelloxodromen und echte *Gewindekurven* [6]. Die Potenzbetragflächen sind also als *hyperbolische Schraubflächen* aufzufassen, bzw. als Schiebflächen oder Drehflächen in den genannten Grenzfällen.

3. Aus der Kommutativität der zweiparametrigen Gruppe Γ folgt, daß die Bahnkurven jeder Untergruppe G_p durch Anwendung irgendeiner G_p nicht angehörenden Transformation $T \in \Gamma$ untereinander vertauscht werden. Nehmen wir daher in einem regulären Punkt P_0 der Fläche F_γ zwei im Sinne der Flächentheorie konjugierte Fortschreitrichtungen an, so bestimmen dieselben zwei Untergruppen G_p und $G_{\bar{p}}$, deren Bahnsysteme auf der Fläche ein *konjugiertes Kurvennetz* bilden. Durch eine geeignete Transformation $T \in \Gamma$ können wir nämlich P_0 an jede andere reguläre Stelle P von F_γ bringen, wobei das Netz in sich übergeht und, da T eine projektive Transformation ist, die konjugierte Beziehung der Bahntangenten von P_0 nach P übertragen wird.

Zu jeder auf der Fläche verlaufenden Bahnkurvenschar (5), gekennzeichnet durch den Parameterwert p, existiert also eine konjugierte Bahnkurvenschar vom Parameter $\bar{p}$. Beispiele hierfür sind das konjugierte Netz aus den vorhin besprochenen Schichtenlinien 2a) und Meridianen 2e) sowie das konjugierte Netz aus den Fallinien 2b) und den zylindro-konischen Spiralen 2c), wie aus den Bemerkungen über die umschriebenen Torsen hervorgeht.

Die Paare konjugierter Flächentangenten in einem Punkt sind bekanntlich durch eine projektive *Involution* verknüpft. Diese wird sich in einer bilinearen Beziehung zwischen den zugehörigen Parameterwerten $p, \bar{p}$ ausdrücken (da diese als lineare Koordinaten der Fortschreitrichtungen dienen können). Mit Rücksicht auf die beiden bekannten Paare $p = \beta/\alpha$, $\bar{p} = \infty$ und $p = -\alpha/\beta$, $\bar{p} = \beta/(\alpha - 1)$ lautet die fragliche Relation

$$p\bar{p} - \frac{\beta}{\alpha}(p + \bar{p}) + \frac{\alpha + \beta^2}{\alpha(\alpha - 1)} = 0 . \tag{6}$$

Für die zugehörigen Werte $q = \alpha p - \beta$, $\bar{q} = \alpha\bar{p} - \beta$ gilt die einfachere Beziehung

$$q\bar{q} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 - \alpha} . \tag{7}$$

Zur direkten Herleitung der Formeln (6) und (7) würde man von der *kartesischen Darstellung*

$$\begin{aligned} x &= e^{pt}(x_0 \cos t - y_0 \sin t), \\ y &= e^{pt}(x_0 \sin t + y_0 \cos t), \\ h &= e^{qt} \cdot h_0 \end{aligned} \tag{8}$$

der Untergruppe G_p ausgehen, die unmittelbar aus (5) fließt. Die Fortschreitrichtungen genügen den Ableitungsgleichungen

$$\dot{x} = px - y, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{h} = qh. \tag{9}$$

Für die zu allen möglichen Fortschreitrichtungen senkrechte *Flächennormale* eines Punktes $P(x, y, h)$ findet man unter Beachtung der Bedingung $q = \alpha p - \beta$ — etwa über das Außenprodukt der zu $p = 0$ und $p = \infty$ gehörigen Tangentenvektoren — die Komponenten

$$X = h(\alpha x + \beta y), \quad Y = h(\alpha y - \beta x), \quad H = -(x^2 + y^2), \tag{10}$$

samt ihren Ableitungsgleichungen

$$\dot{X} = (p + q)X - Y, \qquad \dot{Y} = X + (p + q)Y, \quad \dot{H} = 2pH. \tag{11}$$

Die zu (9) konjugierte Fortschreitrichtung ergibt sich dann im Außenprodukt der Vektoren (10) und (11); nach einigen Umformungen bestätigt sich, daß diese Richtung durch $\bar{p}x - y : x + \bar{p}y : \bar{q}h$ darstellbar ist, wobei die Werte $\bar{p}$ und $\bar{q}$ den Formeln (6) und (7) genügen.

4. Suchen wir mit $p = \bar{p}$ jene beiden Kurvenscharen auf der Fläche F_γ auf, die zu sich selbst konjugiert sind, so erhalten wir ihre *Schmieglinien.* Auch die Schmieglinien der Potenzbetragflächen sind mithin Spirellen. Die sie erzeugenden Untergruppen G_{p_i} werden gemäß (6) durch die beiden Parameterwerte

$$p_{1,2} = \frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 - \alpha}} \tag{12}$$

bestimmt, wozu die Werte

$$q_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{1 - \alpha}} \tag{13}$$

gehören.

Die Schmieglinien fallen *reell* aus — und zwar auf der ganzen Fläche — und bilden zwei getrennte Scharen, wenn $\alpha < 1$. Sie werden aus der Fläche durch untereinander kongruente, gegengleich ansteigende Wendelspiralflächen $h = c \cdot \exp(\pm q_1 \varphi)$ ausgeschnitten[2]). — Die beiden Scharen von Schmieglinien fallen zusammen für $\alpha = 1$, nämlich in den Erzeugenden jenes Kegels mit logarithmischen Schichtenspiralen, der

[2]) Der Fall $\alpha = 0$ der *Wendelspiralfläche* $h = \exp(-\beta\varphi)$ erfordert eine etwas modifizierte Behandlung. Die aus (6) fließende Bestimmungsgleichung für $p = \bar{p}$ reduziert sich nämlich auf eine lineare mit der Lösung $p_1 = -\beta/2$ ($q_1 = -\beta$). Die zugehörigen Schmieglinien sind die unter 2f) erwähnten Spirellen auf Drehparaboloiden, also hyperbolische Schraublinien [5, 6]. Die zweite Schmieglinienschar, zu $p_2 = \infty$ ($q_2 = \beta$) gehörig, wird natürlich von den geraden Erzeugenden $\varphi = \text{const}$ ($h = \text{const}$) der Wendelspiralfläche gebildet.

bei dieser Annahme als Potenzbetragfläche auftritt. — Die Schmieglinien fallen schließlich durchwegs imaginär aus, wenn $\alpha > 1$.

Wir fassen die bisherigen Feststellungen zusammen im

Satz I. *Die Betragfläche der Potenzfunktion $w = z^{\alpha + i\beta}$ gestattet eine zweigliedrige kommutative Gruppe von Affinitäten und trägt ∞^1 Scharen von W-Kurven als Bahnen der eingliedrigen Untergruppen. Unter diesen Bahnscharen finden sich insbesondere die Schichtenlinien, Fallinien, Meridiane und Schmieglinien der Fläche, ferner die Bahnen bei der Erzeugung der Fläche als Bewegfläche, Spiralfläche oder hyperbolische Schraubfläche.*

5. Jedem Raumpunkt $P(x, y, h)$ wird vermöge (10) ein *Flächenelement* (P, π) mit der Normale (X, Y, H) zugeordnet. Es handelt sich dabei um ein *kubisches Nullsystem*. Sucht man den Ort aller Punkte P auf, deren zugeordnete Ebenen π durch einen festen Punkt $C(a, b, c)$ gehen, so erhält man über $X(x-a) + Y(y-b) + H(h-c) = 0$ im allgemeinen eine *kubische Fläche* Φ

$$[(\alpha - 1)h + c](x^2 + y^2) = [(\alpha a - \beta b)x + (\beta a + \alpha b)y] \cdot h, \tag{14}$$

die aus der Potenzbetragfläche F_γ deren („wahre") *Umrißlinie* für das Projektionszentrum C ausschneidet. Die Fläche Φ enthält alle sechs Kanten des Fixtetraeders $OUIJ$ der Gruppe Γ und besitzt dessen Ecken zu konischen Knotenpunkten. Sie wird insbesondere von allen Meridianebenen $\varphi = \text{const}$ neben der h-Achse nach gleichseitigen Hyperbeln und von allen Schichtenebenen $h = \text{const}$ nach Kreisen geschnitten. Die letztere Eigenschaft würde es gestatten, den Umriß von F_γ für beliebige Zentralprojektion bequem zu konstruieren, da lediglich die Schichtenspiralen von F_γ mit den Schichtenkreisen gleicher Höhe von Φ zum Schnitt zu bringen wären.

Allenfalls auftretende *Spitzen* der Umrißprojektion (des „scheinbaren" Umrisses) rühren von jenen Schmiegtangenten der Fläche F_γ her, die durch das Projektionszentrum C gehen. Nun sind zufolge Abschnitt 4 die Schmiegtangenten gleichzeitig Bahntangenten der Untergruppe G_{p_1} oder G_{p_2}, und demgemäß gilt für die kritischen Flächenpunkte $P(x, y, h)$ wegen (9):

$$(x-a) : (y-b) : (h-c) = (p_i x - y) : (x + p_i y) : q_i h. \tag{15}$$

Die den Bedingungen (15) genügenden Raumpunkte P erfüllen zwei auf Φ verlaufende *kubische Raumkurven* k_1 und k_2, welche den Punkt C und die Fixpunkte O, U, I, J gemeinsam haben. Diese Kurven werden aus C durch zwei („orthogonale") *Kegel 2. Ordnung* projiziert[3]). Hieraus folgt dann unmittelbar, daß sich in der Bildebene sämtliche Umrißspitzen auf *zwei Kegelschnitte* k_1', k_2' verteilen, die einander in den Bildpunkten O', U', I', J' der Fixtetraederecken schneiden. Es läßt sich weiterhin zeigen, daß die Tangenten der auf k_i' liegenden Umrißspitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen, der gleichfalls auf k_i' liegt. Dies liegt daran, daß die den Punkten P der Kubik k_i zugeordneten Ebenen π ein Ebenenbüschel bilden, dessen Achse die dem Zentrum C durch G_p zugewiesene Bahntangente ist.

---

[3]) Es sind dies die von C ausstrahlenden *Komplexkegel* der beiden quadratischen (tetraedralen) *Bahntangentenkomplexe* $q_i(g_{01}g_{31} - g_{02}g_{23}) = (p_i^2 - p_i q_i + 1)\, g_{03}g_{12}$ der Untergruppen G_{p_1} und G_{p_2}.

Satz II. *Der wahre Umriß einer Potenzbetragfläche für ein Projektionszentrum C, das keiner Ebene des Fixtetraeders $OUIJ$ angehört, wird aus ihr durch eine kubische Fläche ausgeschnitten, die den Punkt C und sämtliche Tetraederkanten enthält. Die Spitzen des scheinbaren Umrisses verteilen sich auf zwei Kegelschnitte der Bildebene, die jeweils auch den gemeinsamen Tangentenschnittpunkt der betreffenden Spitzengruppe enthalten und einander in den Bildpunkten der Tetraederecken schneiden.*

Dieses Ergebnis verallgemeinert gewisse Feststellungen K. Strubeckers über den Umriß nichteuklidischer Wendelschraubflächen [7], die sich hier mit $\alpha = 0$ einordnen (vgl. Fußnote 2).

Im Falle einer *Parallelprojektion* (in der Richtung $x : y : h = a : b : c,\ c \neq 0$), wie sie etwa den axonometrischen Abbildungen bei E. Ullrich [1] zugrundeliegt, reduziert sich die kubische Trägerfläche Φ (14) des Flächenumrisses auf einen *orthogonalen Kegel 2. Ordnung*

$$c(x^2 + y^2) = [(\alpha a - \beta b)x + (\beta a + \alpha b)y] \cdot h, \tag{16}$$

der dem Fixtetraeder $OUIJ$ umschrieben ist. Dies steht in voller Übereinstimmung mit einer allgemeinen Regel über die Umrißkonstruktion von Spiralflächen, deren Schichtenlinie (im vorliegenden Fall eine logarithmische Spirale) bekannt ist [5]. — Die scheinbaren Umrißspitzen verteilen sich auf zwei *Gerade* der Bildebene, die einander in O' schneiden.

Ähnliche Vereinfachungen würden sich bei Annahme des Projektionszentrums C in der Grundebene einstellen ($c = 0$ in (14) und (15)).

6. Über das einheitliche Vorzeichen der *Gaußschen Krümmung* K einer Potenzbetragfläche gibt — auch ohne Kenntnis einer expliziten Formel für K — bereits Abschnitt 4 mit den Aussagen über die Realitätsverhältnisse der Schmieglinien Aufschluß: Es gilt danach auf der ganzen Fläche F_γ $K \gtreqless 0$, je nachdem $\operatorname{Re}\gamma = \alpha \gtreqless 1$.

Durch Anwendung der von E. Ullrich benützten Formel

$$K = \frac{w''\overline{w}''}{(1 + w'\overline{w}')^2} \operatorname{Re}\left(\frac{w'^2}{w w''} - 1\right) \tag{17}$$

für die Gaußsche Krümmung einer beliebigen Betragfläche[4]) erhält man bei einer Potenzbetragfläche F_γ mit $w = z^\gamma$ den Ausdruck

$$K = \frac{\gamma\overline{\gamma}(\gamma + \overline{\gamma} - 2)\, z^{\gamma-2}\,\overline{z}^{\overline{\gamma}-2}}{2(1 + \gamma\overline{\gamma}\, z^{\gamma-1}\,\overline{z}^{\overline{\gamma}-1})^2} = \frac{\gamma\overline{\gamma}(\gamma + \overline{\gamma} - 2)\, w\overline{w}}{2(z\overline{z} + \gamma\overline{\gamma}\, w\overline{w})^2}. \tag{18}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\gamma\overline{\gamma}\,\frac{\gamma + \overline{\gamma} - 2}{2K} = (\alpha^2 + \beta^2)\,\frac{\alpha - 1}{K} = \lambda^2, \tag{19}$$

---

[4]) Um die von E. Ullrich [1] bei der Ableitung benützten Differentialoperatoren zu vermeiden, empfiehlt es sich, die ins Komplexe erweiterte Betragfläche von $w(z)$ in der Form

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad y = \frac{i}{2}(\overline{z} - z), \quad h = \sqrt{w(z)\,\overline{w}(\overline{z})}$$

darzustellen und $z, \overline{z}$ als voneinander unabhängige Flächenkoordinaten anzusehen.

wobei $K \neq 0$ ($\alpha \neq 0$) vorausgesetzt sei, so folgt aus (18) die Relation

$$r^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\,h^2 = \lambda\,h\,. \tag{20}$$

Diese Gleichung definiert mit festem λ ein *Drehellipsoid*, das die h-Achse zur Rotationsachse und einen Scheitel im Ursprung hat. Es schneidet aus der Fläche F_γ eine Ortslinie von Punkten mit derselben Flächenkrümmung $K =$ const aus.

Satz III. *Bei einer Potenzbetragfläche F_γ ($\alpha \neq 1$) verlaufen die Ortslinien der Stellen gleicher Flächenkrümmung auf ähnlichen und ähnlich gelegenen Drehellipsoiden mit dem Achsenverhältnis $|\gamma| : 1$, welche die Grundebene im Ursprung berühren und daselbst einen gemeinsamen Hauptscheitel haben.*

Literaturverzeichnis

[1] E. Ullrich, Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten. Math. Z. **54**, 297 bis 328 (1951).

[2] E. Ullrich, Geometrisches über Potenzbetragflächen. Z. angew. Math. Mech. **31**, 250–251 (1951).

[3] H. Schmidt, Aufgabe 342. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **56**, *26* (1953); Lösung ebenda **57**, *7* (1955).

[4] F. Klein et S. Lie, Sur une certaine famille de courbes et de surfaces. C. R. Acad. Sci. Paris **70**, 1222–1226, 1275–1279 (1870).

[5] W. Wunderlich, Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Monatsh. Math. Phys. **46**, 248–265 (1938).

[6] K. Strubecker, Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. Phys. **38**, 63–84 (1931).

[7] K. Strubecker, Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl., Abt. IIa **140**, 545–578 (1931).

Eingegangen am 16. 3. 1962

Anschrift des Autors:
Walter Wunderlich
Technische Hochschule
Wien IV, Karlsplatz 13