

WUNDERLICH
Zwei instruktive Trugschlüsse

I

Die ebene Kinematik beruht letzten Endes auf der grundlegenden Tatsache, dass *irgend zwei Lagen eines starren, in der Ebene bewegten Systems stets durch eine Drehung (im Grenzfall durch eine Schiebung) ineinander übergeführt werden können.*

Wie man sich bald überzeugt, wird der Beweis für diesen elementaren Satz in den meisten Büchern folgendermassen geführt: Sind die beiden Systemlagen wie üblich durch zwei entsprechende, kongruente Strecken A_1B_1 und A_2B_2 der Ebene gegeben, und wird die zum Grenzfall führende gleichsinnig-parallele Lage von vornherein ausgeschlossen, so schneiden einander die Streckensymmetralen von A_1A_2 und B_1B_2 in einem eigentlichen Punkt M . Es gilt daher $\overline{MA_1} = \overline{MA_2}$ und $\overline{MB_1} = \overline{MB_2}$, was zusammen mit der Voraussetzung $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ die Kongruenz der Dreiecke MA_1B_1 und MA_2B_2 ergibt. Dreht man nun das erste Dreieck so lange um M , bis A_1 mit A_2 zur Deckung kommt, dann gelangt auch B_1 nach B_2 , und damit ist die erste Systemlage durch Drehung um M in die zweite Lage übergeführt.

Dieser Schluss enthält jedoch eine bedenkliche Lücke, denn er ist nur dann stichhaltig, wenn gesichert ist, dass die beiden Dreiecke MA_1B_1 und MA_2B_2 *gleichsinnig-kongruent* sind, was durch den blossen Längenvergleich der Seiten niemals festzustellen ist!

Der obige «Beweis» bedarf mithin einer notwendigen Ergänzung, die leicht indirekt zu erbringen ist. Nehmen wir an, die beiden Dreiecke MA_1B_1 und MA_2B_2 wären *gegensinnig-kongruent*: Sie müssten dann spiegelbildlich zur gemeinsamen Symmetrale der Winkel A_1MA_2 und B_1MB_2 liegen, die benützten Streckensymmetralen von A_1A_2 und B_1B_2 würden also zusammenfallen und ihr Schnittpunkt wäre (vorläufig) unbestimmt. Dieser Fall kann offenbar nur ausnahmsweise eintreten. Sind mithin die beiden Streckensymmetralen voneinander verschieden, so muss sicher der Fall gleichsinniger Kongruenz vorliegen. Sind sie jedoch einmal identisch, so darf auf ihnen das Drehzentrum M nicht beliebig gewählt werden, sondern es ist im Schnitt der Geraden A_1B_1 und A_2B_2 anzunehmen, wie leicht zu erkennen ist. Damit ist die Existenz eines eindeutig bestimmten Drehzentrums M in allen Fällen sichergestellt.

Wie gefährlich die aufgezeigte Beweislücke tatsächlich ist, zeigt sich, wenn man eine Dimension höhersteigt. Betrachten wir nämlich zwei Bewegungslagen eines starren *Raumsystems*, festgelegt durch zwei entsprechende kongruente Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$: Bezeichnet M den Schnittpunkt der drei Symmetralebenen von A_1A_2 , B_1B_2 und C_1C_2 , so haben wir zwei *kongruente Pyramiden* $MA_1B_1C_1$ und $MA_2B_2C_2$. Nehmen wir stillschweigend wieder an, dass diese Pyramiden gleichsinnig-kongruent sind, so könnten wir weiterfolgern, dass sie und damit die beiden Systemlagen durch *Drehung um eine Achse* des Bündels M ineinander überzuführen sind. Dies ist aber im allge-

meinen falsch, da bekanntlich zwei Lagen eines bewegten Raumsystems im allgemeinen durch eine *Schraubung* zusammenhängen!

Die Ursache des Trugschlusses liegt auf der Hand: Die beiden Pyramiden $MA_1B_1C_1$ und $MA_2B_2C_2$ sind eben nicht gleichsinnig-kongruent (wenn der Schnittpunkt der benützten Symmetrieebenen eindeutig ausfällt), sondern *gegensinnig-kongruent*, was aber durch blossen Längenvergleich der Kanten nicht festzustellen ist.

II

Als «*Gewindeflächen*» bezeichnet man solche Strahlflächen (Regelflächen), deren sämtliche Erzeugende einem *linearen Strahlkomplex* (*Gewinde*) angehören. Hierunter fallen beispielsweise alle algebraischen Strahlflächen bis zum 4. Grade, die Strahlschraubflächen u. a. Für windschiefe Gewindeflächen hat S. LIE die Existenz *ausgezeichneter Schmieglinien* (Haupttangentialkurven, Asymptotenlinien) nachgewiesen, die sich ohne Integrationsprozess finden lassen¹⁾.

Zu den LIESchen Schmieglinien einer Gewindefläche F – die der Einfachheit halber als analytisch vorausgesetzt sei – kommt man auf die folgende Weise. Bezeichne \mathfrak{G} das die Strahlfläche F enthaltende Gewinde oder, falls F mehreren Gewinden angehört, ein bestimmtes unter denselben²⁾. Sei $g \in \mathfrak{G}$ eine allgemeine Erzeugende von F . Sämtliche durch einen Punkt T von g gehenden Gewindestrahlen bilden bekanntlich ein Strahlbüschel, dessen Ebene τ' natürlich auch die Erzeugende g enthält und daher die Fläche F in einem bestimmten Punkt T' von g berührt. Die Zuordnung $T \rightarrow T'$ auf g ist wegen des projektiven Charakters der Nullkorrelation $T \rightarrow \tau'$ und der Berührungskorrelation $\tau' \rightarrow T'$ eine *Projektivität*, und zwar eine Involution. Für jeden der beiden (nicht unbedingt reellen) Doppelpunkte $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$ ist also die Nullebene gleichzeitig Tangentialebene. Alle in T_1 oder T_2 berührenden Flächentangenten sind mithin Gewindestrahlen, darunter insbesondere auch die Tangenten der beiden Ortslinien h_1 von T_1 und h_2 von T_2 . Diese Flächenkurven h_1 , h_2 (die auch bloss zwei Zweige einer einzigen Kurve sein können) sind mithin *Gewindekurven*. Von solchen Kurven weiss man aber, dass die Nullebenen ihrer Punkte die Schmiegeebenen sind. Daraus folgt nun schliesslich, dass h_1 und h_2 *Schmieglinien* der Fläche F sind, nachdem in jedem ihrer Punkte die Schmiegeebene gleichzeitig Tangentialebene ist.

Die angestellten Überlegungen verlocken zur nachstehenden *Verallgemeinerung auf beliebige krumme Flächen*. Sei jetzt F eine beliebige, der Einfachheit halber wieder als analytisch vorausgesetzte Fläche, und \mathfrak{G} ein beliebiges, von F ganz unabhängiges Gewinde. Jedem Flächenpunkt T wird vermöge F eine Tangentialebene τ und vermöge \mathfrak{G} eine Nullebene τ' zugewiesen. Ordnet man nun jedem Punkt T den Winkelwert $\omega = \sphericalangle \tau \tau'$ zu, so entsteht auf F ein analytisches *Skalarfeld* $\omega(T)$. Wir betrachten nun die durch $\omega = 0$ erklärte (nicht unbedingt reelle) *Niveaulinie* h dieses Feldes. In jedem Punkt von h ist $\tau = \tau'$, also die Tangentialebene identisch mit der Nullebene. Alle Tangenten von h sind daher Gewindestrahlen, und h ist demnach *Gewindekurve*. Wie vorhin schliesst man dann aus der Eigenschaft, dass die Schmiegeebenen einer Ge-

¹⁾ Vgl. etwa E. KRUPPA: *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Wien 1957), 87 ff. und 133 ff.

²⁾ Gehört eine Strahlfläche zwei Gewinden an, so treffen ihre Erzeugenden die beiden gemeinsamen reziproken Polaren, und sie ist «*Netzfläche*». Sie liegt dann in unendlich vielen Gewinden und ihre sämtlichen, von den Erzeugenden verschiedenen Schmieglinien sind LIESche. Beispiele hierfür sind etwa alle kubischen Strahlflächen.

windekurve die Nullebenen der Kurvenpunkte sind, dass h eine *Schmieglinie* der Fläche F ist, weil in jedem ihrer Punkte die Schmiegeebene mit der Tangentialebene übereinstimmt. Damit scheint die Existenz von ausgezeichneten, ohne Integration einer Differentialgleichung auffindbaren Schmieglinien bei beliebigen krummen Flächen nachgewiesen zu sein!

Der berechtigte Verdacht, mit dieser verblüffenden Feststellung einem Trugschluss erlegen zu sein, steigert sich zur Überzeugung, sobald man das Gewinde \mathfrak{G} variieren lässt, weil man dadurch zu ∞^5 Schmieglinien der Fläche gelangen würde, was offensichtlich unmöglich ist. Wo steckt nun der Fehler?

Der Fehler ist nicht ganz leicht zu entdecken, da er sich an einer recht unverfänglichen Stelle verbirgt: er liegt nämlich dort, wo aus $\sphericalangle \tau \tau' = 0$ auf $\tau = \tau'$ geschlossen wurde, was nur im Reellen zulässig ist. Berechnet man, gestützt auf ein lokales kartesisches Koordinatensystem $Txyz$, den (euklidischen) Winkel ω der Ebenen

$$\tau \dots z = 0 \quad \text{und} \quad \tau' \dots ux + vy + wz = 0 \quad (1)$$

mittels der geläufigen Formel

$$\cos \omega = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \quad (2)$$

so erhält man $\omega = 0$, falls

$$u^2 + v^2 = 0, \quad \text{also} \quad u \pm iv = 0. \quad (3)$$

Geometrisch bedeutet das, dass die *Schnittgerade* g der Ebenen τ, τ' eine *Minimalgerade* $x \pm iy = 0$ ist, also – unabhängig vom Koordinatensystem – eine *Treffgerade des absoluten Kegelschnitts* l ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$) in der Fernebene. Im Komplexen können also zwei Ebenen einen verschwindenden Winkel einschliessen, ohne zusammenzufallen, wenn nur ihre Schnittgerade eine Minimalgerade ist.

Die nach allem im allgemeinen effektiv *existierende Niveaulinie* h ($\omega = 0$) ist mithin der Ort aller Punkte auf F , in welchen eine dem Gewinde \mathfrak{G} angehörende und den absoluten Kegelschnitt treffende Flächentangente g vorhanden ist. Deuten wir in bekannter Weise das Gewinde \mathfrak{G} als Gesamtheit der ∞^3 Bahnnormalen einer Schraubung mit der Achse a und der reduzierten Ganghöhe p , so sind die ∞^2 den absoluten Kegelschnitt l treffenden Gewindestrahlen dadurch ausgezeichnet, dass sie den zu l nullpolaren *Drehzylinder* L mit der Achse a und dem Radius pi berühren; sie sind gleichzeitig – und das charakterisiert sie eindeutig – die Schraubtangente der Punkte des Zylinders L . Die Niveaulinie h ist demnach die auf F verlaufende Berührungskurve einer durch die Leitflächen F und L und die Leitlinie l bestimmten (isotropen) *Strahlfläche* H , deren Erzeugenden g die Kurve h nicht zu berühren brauchen. In den Punkten von h bilden die Ebenen τ, τ' zwar einen Winkel von der Grösse $\omega = 0$, sie fallen jedoch nicht zusammen. Die Flächenkurve h ist mithin im allgemeinen *keine Gewindekurve* und somit auch *keine Schmieglinie* von F . Das Gegenteil trifft nur ausnahmsweise zu, falls h die Berührungslinie zweier Mäntel von H ist, weil dann doch $\tau = \tau'$ gilt. Dieser Umstand tritt beispielsweise bei den *Gewindeflächen* ein, aber auch bei beliebigen *Schraubflächen*, auf denen sich für gewöhnlich ausgezeichnete Schraublinien (also Gewindekurven) finden lassen, die Schmieglinien der Fläche sind: es sind dies jene Schraublinien, längs welchen der Schraubfläche eine Wendelfläche berührend angeschrieben werden kann.

W. WUNDERLICH (Wien)