

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

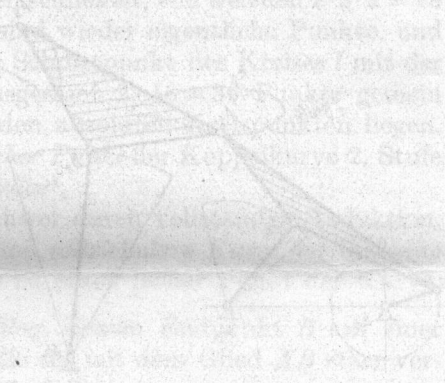
Schriftleiter: H. Parkus, Technische Hochschule Wien

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Alle Rechte vorbehalten

W. Wunderlich:

Höhere Koppelkurven



Höhere Koppelkurven

Von W. Wunderlich, Wien

Mit 3 Textabbildungen

Zusammenfassung. Es werden jene ebenen Kurven untersucht, die kinematisch durch $s > 1$ an eine Kurbel angeschlossene Zweischläge erzeugt werden. Für die algebraischen Charaktere und die mehrfache Erzeugung solcher „Koppelkurven s -ter Stufe“ — die Verallgemeinerungen der zu $s = 1$ gehörigen klassischen Koppelkurven des Dreistabgetriebes darstellen — werden einfache Ableitungen gegeben.

§1. Sei $L_0 A_0 B_0 M_0$ ein ebenes Gelenkviereck mit den festen Lagerpunkten L_0 und M_0 (Abb. 1). Ein mit der Koppel $A_0 B_0$ starr verbundener Punkt A_1 beschreibt bei der Bewegung des Dreistabgetriebes eine sogenannte *Koppelkurve*. Kurven dieser Art, dank ihrer einfachen Erzeugbarkeit einerseits und ihres Formenreichtums andererseits in der modernen Getriebetechnik mannigfach verwertet, sind seit langem bekannt und ausführlich untersucht¹. Es handelt sich um algebraische Kurven, die von 6 Formparametern abhängen (etwa den Seitenlängen des Gelenkvierecks und des Koppeldreiecks). Sie sind im allgemeinen von 6. Ordnung und vollzirkular, d. h. ihre Fernpunkte fallen sämtlich in die absoluten Kreispunkte $x:y = \pm i$ und bilden daselbst dreifache Punkte. — Mit Rücksicht auf die folgende Verallgemeinerung sollen diese klassischen Kurven als „Koppelkurven 1. Stufe“ bezeichnet werden.

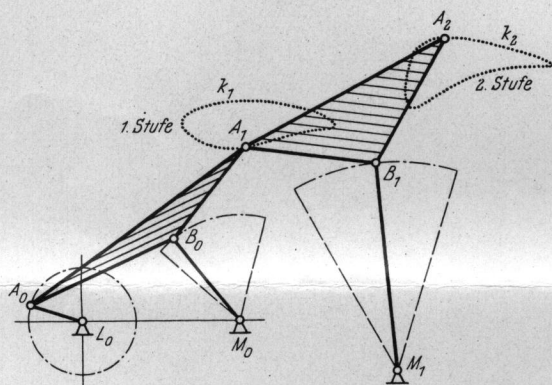


Abb. 1. Koppelkurven 1. und 2. Stufe

punkt M_1 zu einem sechsgliedrigen Getriebe erweitert werden (Abb. 1). Die Bahn k_2 eines mit dem Glied $A_1 B_1$ starr verbundenen Punktes A_2 mag dann eine „Koppelkurve 2. Stufe“ genannt werden. Sie erscheint auf die gleiche Weise aus der Koppelkurve 1. Stufe k_1 des Punktes A_1 abgeleitet, wie diese aus dem Bahnkreis k_0 des Kurbelendes A_0 („Koppelkurve 0. Stufe“).

§2. So betrachtet erscheint es naheliegend, durch fortgesetztes Anfügen von Zweischlägen zu Koppelkurven beliebig hoher Stufe fortzuschreiten. Eine *Koppelkurve s -ter Stufe* ist demnach rekursiv erklärt als Bahn eines Punktes A_s , der mit dem Glied $A_{s-1} B_{s-1}$ eines in M_{s-1} fest gelagerten Zweischlages $A_{s-1} B_{s-1} M_{s-1}$ starr verbunden ist, wenn A_{s-1} auf einer Koppelkurve $(s-1)$ -ter Stufe geführt wird.

Eine solche Koppelkurve s -ter Stufe k_s wird also erzeugt durch ein Getriebe mit $2(s+1)$ Gliedern, $s+1$ festen Lagern und $2s$ beweglichen Gelenken. Wie eine einfache

¹ A. Schoenflies-M. Grübler: Kinematik. Enzykl. Math. Wiss. IV, 3 (1901/08), 220 ff. — F. Ebner: Leitfaden der technisch wichtigen Kurven (Leipzig 1906), 45 ff. — R. Beyer: Technische Kinematik (Leipzig 1931). — K. Hain: Angewandte Getriebelehre (Düsseldorf 1961).

² K. A. Rischen: Weiterleitung von Bewegungen durch Koppelkurven der zweiten Koppel-ebene eines sechsgliedrigen Getriebes. Dipl.-Arbeit T. H. Aachen 1959 (unveröffentlichtes Manuskript). — Über die achtfache Erzeugung der Koppelkurven der zweiten Koppellebene. Konstruktion im Maschinen-, Apparate- und Gerätebau 14, 381–385 (1962).

Abzählung der wesentlichen Getriebeabmessungen lehrt, hängt die Koppelkurve s -ter Stufe für $s > 0$ von $6s$ Formparametern ab.

§ 3. Daß auch die höheren Koppelkurven *algebraisch* sind, folgt unmittelbar aus ihrer Erzeugung durch einen Gelenksmechanismus.

Zunächst möge die *Ordnung einer Koppelkurve 2. Stufe* k_2 bestimmt werden, also die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden l allgemeiner Lage. Zu diesem Zwecke denke man sich das Koppeldreieck $A_1 B_1 A_2$ mit A_2 auf der genannten Geraden l geführt, mit B_2 hingegen unverändert auf dem Kurbelkreis um M_1 (Abb. 1). Der Punkt A_1 beschreibt dann vermöge dieses ideellen Schubkurbelgetriebes bekanntlich eine Kurve 4. Ordnung, die einfachzirkular ist³. Sie schneidet sonach die ursprüngliche Bahn k_1 von A_1 (Koppelkurve 1. Stufe) in insgesamt $4 \cdot 6 = 24$ Punkten, von welchen jedoch $2 \cdot 3 = 6$ in die absoluten Punkte fallen. Die restlichen 18 sind eigentliche Punkte, und jedem von ihnen entspricht genau ein Schnittpunkt der Geraden l mit der Koppelkurve 2. Stufe k_2 , die mithin im allgemeinen eine *Kurve 18. Ordnung* ist⁴.

Führt man A_2 statt auf einer Geraden auf einem Kreis $l - B_1$ nach wie vor auf dem Kurbelkreis um M_1 —, so beschreibt A_1 eine Koppelkurve 1. Stufe k_1^* , die die ursprüngliche Bahn k_1 in insgesamt $6 \cdot 6 = 36$ Punkten schneidet, von welchen $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ in die absoluten Punkte fallen. Die restlichen 18 sind wieder eigentliche Punkte, und jedem von ihnen entspricht genau ein eigentlicher Schnittpunkt des Kreises l mit der Koppelkurve 2. Stufe k_2 . Da l und k_2 jedoch insgesamt $2 \cdot 18 = 36$ Punkte gemein haben müssen, schließt man, daß 18 hiervon in den absoluten Kreispunkten liegen. Jeder der beiden Kreispunkte ist demnach *neunfacher Punkt* der Koppelkurve 2. Stufe und diese mithin (wie jene 1. Stufe) wieder *vollzirkular*⁴.

In dieser Weise fortfahrend ergibt sich unschwer durch vollständige Induktion, daß die *Koppelkurve s -ter Stufe* im allgemeinen eine *vollzirkulare Kurve der Ordnung $2 \cdot 3^s$* ist; jeder der beiden absoluten Kreispunkte ist ein 3^s -facher Punkt der Kurve.

§ 4. Sei OAB ein in O fest gelagerter *Zweischlag*, dessen Endpunkt B auf einer gegebenen *Leitkurve* h geführt wird. Die Bahn k , die ein mit dem Glied AB starr verbundener Punkt C durchläuft, wird am einfachsten erfaßt, wenn man das ganze Getriebe, in eine *Gaußsche Ebene* einbettet und die Vektoren OA und AB durch zwei komplexe Veränderliche $u(t)$, $v(t)$ mit festen Absolutbeträgen a , b beschreibt⁵. Ihre Summe $u + v = z(t)$ ist durch die Leitkurve h gegeben (Abb. 2). Der Vektor AC kann dann in der Form αv dargestellt werden, wobei die komplexe Konstante α durch die Drehstreckung $AB \rightarrow AC$, also durch $|\alpha| = \overline{AC} : \overline{AB}$ und $\arg \alpha = \angle BAC$ festgelegt ist. Die Bahn k von C wird demnach beschrieben durch

$$\zeta(t) = u + \alpha v, \quad |u| = a, \quad |v| = b, \quad u + v = z(t). \quad (1)$$

Nimmt man nun in (1) eine *Umordnung* vor, indem man $\alpha v = u'$ und $u = \alpha' v'$ setzt, wobei $v' = \alpha u$ und $\alpha' = \alpha^{-1}$, so gelangt man zu einer zweiten, ganz analogen Darstellung:

$$\zeta(t) = u' + \alpha' v', \quad |u'| = |\alpha| b, \quad |v'| = |\alpha| a, \quad u' + v' = z'(t) = \alpha z. \quad (2)$$

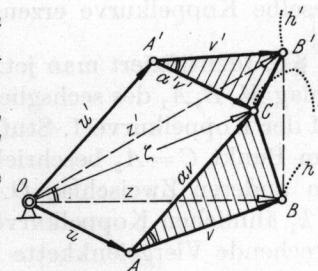


Abb. 2. Plagiograph von Sylvester

³ F. Ebner: a. a. O.¹, 18 ff.

⁴ Dieses Ergebnis bestätigt eine Vermutung von W. Meyer zur Capellen, die sich auf die Betrachtung von Sonderfällen stützte (vgl. K. A. Rischen a. a. O.², Fußnote 1).

⁵ Ist im übrigen die Leitkurve h eine r -fach zirkulare algebraische Kurve n -ter Ordnung, dann findet man nach dem Muster von § 3, daß die abgeleitete Kurve k eine $(n+r)$ -fach zirkulare Kurve der Ordnung $4n - 2r$ ist.

Die Bahn k von C gestattet demzufolge noch eine *zweite Erzeugung* durch einen neuen Zweischlag $OA'B'$ ($OA' = u' = \alpha v$, $A'B' = v' = \alpha u$), dessen Glied $A'B'$ mit dem Endpunkt B' auf einer zu h ähnlichen Leitkurve h' geführt wird und den starr verbundenen Punkt C ($B'C = \alpha' v' = u$) mitnimmt. Abb. 2 zeigt den vollständigen, seit J. J. Sylvester unter dem Namen „*Plagiograph*“ bekannten Mechanismus⁶. Er besteht aus einem Gelenkparallelogramm $OACA'$ mit zwei ähnlichen Aufsatzdreiecken $ABC \sim A'CB'$ und kann wegen $OB'B' \sim ABC$ zur Realisierung der *Drehstreckung* $z' = \alpha z$ dienen. Die ganze Theorie dieses verallgemeinerten Pantographen ist in den Gleichungen (1) und (2) enthalten.

§ 5. Identifiziert man den Zweischlag OAB aus Abb. 2 mit dem Zweischlag $L_0A_0B_0$ in Abb. 1 und führt man B_0 auf dem Kurbelkreis h um M_0 , so folgt für die vom Punkt $C = A_1$ beschriebene *Koppelkurve 1. Stufe* $k = k_1$ auf Grund von § 4 eine *zweite Erzeugung* durch ein neues Gelenkviereck $L_0A_0'B_0'N_0$. Das Dreieck der Lagerpunkte $L_0M_0N_0$ ist nach allem ähnlich zu den beiden Koppeldreiecken $A_0B_0A_1 \sim A_0'A_1B_0'$. Die nach S. Roberts⁷ existierende *dritte Erzeugung* derselben Koppelkurve ergibt sich auf die gleiche Weise, indem man den Zweischlag OAB mit $M_0B_0A_0$ identifiziert und den Kurbelkreis von A_0 um L_0 als Leitkurve ansieht; das so ableitbare dritte Gelenkviereck hat die bereits bekannten Lagerpunkte M_0 und N_0 .

Diese wohl natürlichste Ableitung des berühmten Satzes von Roberts, die *dreifache Erzeugung der Koppelkurve 1. Stufe* betreffend, dürfte ihrem geometrischen Gehalt nach schon S. Roberts selbst bekannt gewesen sein⁸. Sie gestattet nun nach dem Muster der Gleichungen (1) und (2) eine äußerst knappe analytische Fassung, die der Verfasser schon bei früherer Gelegenheit mitgeteilt hat⁹. Dieser analytische Beweis ist wahrscheinlich der kürzeste überhaupt, denn er besteht im Grunde nur in der beinahe trivialen Feststellung: „Sind u, v, w drei komplexe Veränderliche mit festen Absolutbeträgen und konstanter, nichtverschwindender Summe, dann gilt bei festem $\alpha \neq 0$ Gleiches auch von den Größen $u' = \alpha v$, $v' = \alpha u$, $w' = \alpha w$, und die Koppelkurve $\zeta = u + \alpha v$ gestattet daher die äquivalente zweite Darstellung $\zeta = u' + \alpha' v'$ mit $\alpha' = \alpha^{-1}$.“ Die Variablen u, v, w bzw. u', v', w' repräsentieren dabei die beweglichen Glieder zweier dieselbe Koppelkurve erzeugenden Dreistabgetriebe.

§ 6. Identifiziert man jetzt den Zweischlag OAB des Plagiographen mit dem Zweischlag $M_1B_1A_1$ des sechsgliedrigen Getriebes in Abb. 1, bei welchem der Endpunkt A_1 auf der Koppelkurve 1. Stufe $h = k_1$ geführt wird, so ergibt sich gemäß § 4 für die von dem Punkt $C = A_2$ beschriebene *Koppelkurve 2. Stufe* k_2 eine *zweite Erzeugung* durch den anderen Zweischlag $OA'B' = M_1B_1'A_1'$, wenn dessen Endpunkt A_1' auf einer zu k_1 ähnlichen Koppelkurve 1. Stufe k_1' geführt wird, was wiederum durch eine entsprechende Viergelenkkette bewirkt werden kann. Bedenkt man hierbei, daß es nach dem Satz von Roberts je drei Gelenkvierecke gibt, die k_1 bzw. k_1' erzeugen, so gelangt man zu der von K. A. Rischen erkannten *sechsfachen Erzeugung der Koppelkurve 2. Stufe* durch sechsgliedrige Gelenkmechanismen¹⁰. Die sechs Getriebe sind aus Abb. 3 zu entnehmen.

Entsprechende Überlegungen für die *Koppelkurve s-ter Stufe* führen auf deren $3 \cdot 2^{s-1}$ -fache *Erzeugung* durch $2(s+1)$ -gliedrige Gelenkmechanismen, die sie aus zwei

⁶ J. J. Sylvester: On recent discoveries in mechanical conversion of motion. Proc. London Roy. Inst. 7, 179–198 (1875). — F. Ebner: a. a. O.¹, 86.

⁷ S. Roberts: On three bar motion in plane space. Proc. London Math. Soc. 7, 14 (1875).

⁸ Enzykl. Math. Wiss. IV, 3; S. 252, Fußnote³³⁴.

⁹ W. Wunderlich: Kinematik in der Ebene der komplexen Zahlen. Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. 12, 11–18 (1958).

