Journal für die reine und angewandte Mathematik

Herausgegeben von **Helmut Hasse** und **Hans Rohrbach**

Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 30

Sonderabdruck aus Band 214/215, 1964. Seite 31 bis 42

Böschungslinien, die mit ihren Planevoluten zusammenfallen

Von *W. Wunderlich* in Wien

Herrn Professor Dr. H. Hasse zum 65. Geburtstag

1. Als *Planevolute* einer Kurve c des dreidimensionalen euklidischen Raumes wird jene Raumkurve c_1 bezeichnet, die von den Normalebenen der Kurve c eingehüllt wird, vorausgesetzt, daß c nicht sphärisch oder eben ist [2]. Die Punkte von c_1 sind bekanntlich die Zentren der *Schmiegkugeln* von c, die Tangenten von c_1 die *Krümmungsachsen* von c, und die Schmiegebenen von c_1 definitionsgemäß die *Normalebenen* von c.

Durch Wiederholung dieses Ableitungsvorganges gelangt man zur Planevolute c_2 von c_1, die die „2. *Planevolute*" von c genannt wird, usf. Man kann auf diese Weise zu Planevoluten beliebig hoher Ordnung fortschreiten, solange man auf keine sphärische Kurve stößt (ebene Kurven können bei diesem Prozeß nicht auftreten).

Die Schmiegebenen in entsprechenden Punkten von c und c_1 sind normal, daher in entsprechenden Punkten von c und c_2 parallel oder identisch. Diese Feststellung legt die Frage nahe, ob es Kurvenpaare c, c_2 gibt, für welche entsprechende Schmiegebenen durchwegs zusammenfallen, so daß $c = c_2$ ist. Die Antwort kannte schon G. Monge (1784): *Die Kurven, die mit ihrer* 2. *Planevolute punktweise zusammenfallen, sind die Kurven konstanter Krümmung* [2].

Darüber hinausgehend hat unlängst R. Lagrange [7] allgemein die Kurven $c = c_{2\nu}$ ($\nu \geqq 1$) bestimmt, also jene Raumkurven, die mit einer ihrer *Planevoluten gerader Ordnung* punktweise zusammenfallen. Diese Aufgabe fällt in den Kreis gewisser differentialgeometrischer *Schließungsprobleme*, über welche vor kurzem M. Barner [1] berichtet hat. Aufgaben dieser Art laufen auf gewöhnliche Differentialgleichungen oder Systeme von solchen hinaus. Lagrange verwendet als Kurvenparameter die Bogenlänge τ des sphärischen Binormalenbildes und führt nach Vorgabe der konischen Krümmung $k(\tau)$ sein Schließungsproblem auf eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung für den Krümmungsradius zurück. Diese Differentialgleichung läßt sich insbesondere unter der Annahme $k = \text{const}$ explizit integrieren und liefert solcherart die *Böschungslinien* $c = c_{2\nu}$. Auf solche Böschungslinien — insbesondere auf das näher ausgeführte Beispiel einer Böschungslinie $c = c_4$ mit dem Steigwinkel $\frac{\pi}{4}$ ($k = 1$) wird in Abschn. 12 noch zurückgekommen.

2. Solange die Forderung nach punktweiser Identität — sozusagen „Identität im Kleinen" — aufrechterhalten wird, hat natürlich die Frage nach Raumkurven, die mit einer ihrer *Planevoluten ungerader Ordnung* zusammenfallen, im Reellen keine Antwort, da entsprechende Schmiegebenen immer orthogonal sind[1]).

[1]) Zwei zueinander normale Ebenen können nur in einer *Minimalebene* zusammenfallen. Im komplexen Raum sind die Kurven $c = c_1$ mit identischer Entsprechung der Punkte mithin die *Minimalkurven*.

Die Situation ändert sich jedoch sofort, sobald nur mehr „Identität im Großen" verlangt wird, also die Raumkurve c nur mehr *als ganze* mit einer Planevolute $c_{2\nu-1}$ zusammenfallen soll. Aus der Orthogonalität entsprechender Schmiegebenen und entsprechender Tangenten folgt zunächst, daß die *Fernkurve u der Tangentenfläche von* $c = c_{2\nu-1}$ *bezüglich des absoluten Kegelschnitts o autopolar* sein muß. Solche Kurven u, die im Rahmen der durch o regulierten projektiven (elliptischen) Metrik der Fernebene *autoparallele Kurven im Abstand* $\frac{\pi}{2}$ sind, könnten als *Hüllkurven beliebiger einparametriger Scharen von Fernkreisen mit demselben Öffnungswinkel (Durchmesser)* $\frac{\pi}{2}$ gewonnen werden.

Die einfachste Fernkurve dieser Art ist ein einzelner *Fernkreis mit der Öffnung* $\frac{\pi}{2}$, festgelegt etwa durch den Richtkegel mit der kartesischen Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{1}$$

Ausschließlich diese Annahme wird der vorliegenden Arbeit zugrundeliegen. Die betrachteten Raumkurven c sind demnach durchwegs *Böschungslinien mit dem Steigwinkel* $\frac{\pi}{4}$, wobei die z-Achse die Lotrichtung anzeigt. Es sollen vor allem die Böschungslinien $c = c_1$ bestimmt werden, also jene, die — als ganze — mit ihrer ersten Planevolute zusammenfallen. Dies mag als Beitrag zum Problem der räumlichen „*Autoevoluten*" angesehen werden, das in seiner allgemeinen Fassung noch offen ist, während das entsprechende ebene Problem, wie kürzlich dargelegt wurde, keine besonderen Schwierigkeiten bietet, solange euklidische Metrik herrscht [9].

3. Wir setzen die Böschungslinie c durch die Schar ihrer unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ ansteigenden *Schmiegebenen*

$$\sigma \ldots x \sin\varphi - y\cos\varphi + z = h(\varphi) \tag{2}$$

an; φ bedeutet dabei den Richtungswinkel der Grundspur gegen die x-Achse und h den von φ abhängigen Abschnitt auf der z-Achse. Zweimalige Ableitung nach dem Scharparameter φ führt auf die lotrechten Hilfsebenen

$$\begin{aligned} \sigma' \ldots \quad & x\cos\varphi + y\sin\varphi = h', \\ \sigma'' \ldots & -x\sin\varphi + y\cos\varphi = h'', \end{aligned} \tag{3}$$

die im Schnitt mit σ den laufenden Kurvenpunkt und damit eine Parameterdarstellung der Kurve c liefern:

$$c \ldots x = h'\cos\varphi - h''\sin\varphi,\ y = h'\sin\varphi + h''\cos\varphi,\ z = h + h''. \tag{4}$$

Die Schnittgerade von σ und σ'' ist Hauptnormale von c, geeignete Linearkombination ergibt daher die *Normalebene* von c, das ist die σ korrespondierende Schmiegebene σ_1 der *Planevolute* c_1:

$$\sigma_1 \ldots -x\sin\varphi + y\cos\varphi + z = h + 2h''. \tag{5}$$

Soll nun c_1 mit c zusammenfallen, so muß die Normalebene σ_1 an der Stelle φ mit einer Schmiegebene σ an einer vorhergehenden oder nachfolgenden Stelle $\overline{\varphi} = \varphi + \alpha$ übereinstimmen, wobei α nur ein gestreckter Winkel sein kann. Damit gelangt man zur *Schlüsselgleichung* des Problems:

$$h(\varphi) + 2h''(\varphi) = h(\varphi + \alpha) \text{ mit } \alpha \equiv \pi \pmod{2\pi}. \tag{6}$$

Im Gegensatz zu den eingangs erwähnten Schließungsproblemen tritt hier keine gewöhnliche Differentialgleichung auf, sondern eine „Hystero-Differentialgleichung" mit konstanter Verzögerung. Über den Wissensstand hinsichtlich solcher Differenzengleichungen orientiert ein zusammenfassender Bericht von W. Hahn [5]. Grundlegend für die vorliegende lineare Gleichung (6) ist die Existenz von Elementarlösungen in Gestalt von Exponentialfunktionen, aus denen sich weitere Lösungen durch Linearkombination gewinnen lassen.

4. Wird eine *Elementarlösung* der Schlüsselgleichung (6) mit

$$h = e^{r\varphi} \tag{7}$$

angesetzt, so muß die Konstante r der Bedingung

$$1 + 2r^2 = e^{\alpha r} \text{ mit } \alpha = (2j - 1)\,\pi \tag{8}$$

genügen. Man überzeugt sich unschwer, daß diese Gleichung außer der trivialen Lösung $r = 0$ keine reellen Lösungen besitzt[2]). Die triviale Lösung ist jedoch auszuschließen, weil für sie zufolge $h = 1$ die Kurve c auf einen einzigen Punkt $P(0, 0, 1)$ zusammenschrumpft. Ein reeller Lösungswert $r \neq 0$ hätte auf eine *zylindrokonische Spirale* (*Drehkegelloxodrome*) geführt[3]).

Zur Ermittlung der *komplexen Lösungswerte* $r = q + in$ wird die Gleichung (8) in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Man erhält so das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} e^{\alpha q} \cos \alpha n &= 1 + 2q^2 - 2n^2, \\ e^{\alpha q} \sin \alpha n &= 4qn \text{ mit } \alpha = (2j - 1)\,\pi, \end{aligned} \tag{9a, b}$$

wobei es aus Symmetriegründen genügt, sich auf positive Werte von j zu beschränken. Bildet man die Quadratsumme und den Quotienten von (9a) und (9b), so läßt sich aus den gewonnenen Ausdrücken für $e^{2\alpha q}$ bzw. $\cot \alpha n$ das n bzw. q ausrechnen:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{e^{2\alpha q} - 8q^2}\right) - q^2 = f^2(q), \\ q &= n \cot \alpha n \pm \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 \alpha n} - \frac{1}{2}} = g(n). \end{aligned} \tag{10a, b}$$

Abb. 1 zeigt in der komplexen r-Ebene die *Diagrammkurven* der Abhängigkeiten $n = f(q)$ und $q = g(n)$ für die Annahme $j = 2$. Unter den Schnittpunkten dieser Kurven finden sich die gesuchten Lösungswerte r von (8). Die restlichen Schnittpunkte bedeuten Lösungswerte von $1 + 2r^2 = -e^{\alpha r}$ und sind auszuscheiden. Neben jeder Lösung $r = q + in$ tritt natürlich auch die konjugierte Lösung $\bar{r} = q - in$ auf, weshalb es genügt, die Halbebene $n > 0$ zu betrachten. Aus dem Verlauf der Diagrammkurven geht hervor, daß für jedes α unendlich viele Lösungen existieren. Als unbrauchbar erweist sich nur das triviale Lösungspaar $r, \bar{r} = \pm i$, das durch Linearkombination (Abschn. 5) auf $h = a \cos \varphi + b \sin \varphi$ und damit wieder auf eine punktförmig ausgeartete Raumkurve c führen würde.

---

[2]) Nichttriviale reelle Lösungen würde die Gleichung (8) nur für $|\alpha| \leqq 1{,}138 \approx 65^0$ aufweisen, was der Voraussetzung $|\alpha| \geqq \pi$ widerspricht. Der Schrankenwert α ist dadurch bestimmt, daß er neben (8) auch noch der Ableitung $4r = \alpha e^{\alpha r}$ genügt.

[3]) Jede zylindrokonische Spirale mit der Steigung 1 — charakterisiert durch (7) mit beliebigem $r \neq 0$ — ist zu ihrer Planevolute *kongruent* und hängt mit derselben durch eine Drehung um den Winkel $\gamma = \pi - \alpha$ zusammen, wobei α aus dem linken Teil von (8) zu berechnen ist.

Bei der *numerischen Auswertung* des Gleichungspaares (10a, b) wurde die Tatsache ausgenützt, daß der Schnitt der Diagrammkurven in Abb. 1 durchwegs orthogonal erfolgt. Dies beruht darauf, daß man die Diagrammkurven als das durch die komplexe Funktion

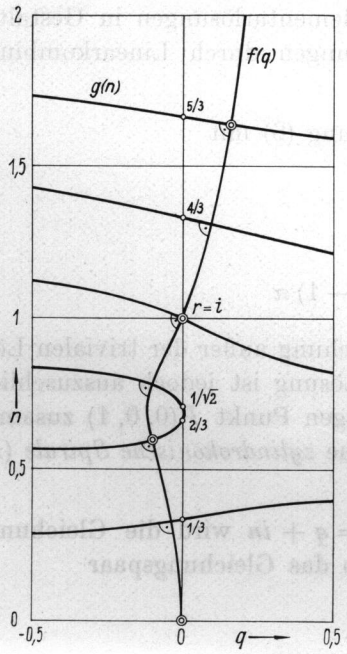

Abb. 1: Graphische Darstellung des Gleichungspaares (10a, b) für $\alpha = 3\pi$.

j	q	n	α
1	0,8899	2,7923	π
2	—0,1000 0,1587	0,5967 1,6416	3π
3	—0,0883 0,0675	0,7053 1,3917	5π

$w = \alpha r - \log(1 + 2r^2)$ vermittelte konforme Bild des rechtwinkligen Geradenpaares $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w = 0$ deuten kann. Es wurde daher der folgende Weg eingeschlagen: Ausgehend von einem der graphischen Darstellung entnommenen Näherungswert q_0 wurde mittels (10a) $n_0 = f(q_0)$ berechnet, anschließend mittels (10b) $q_1 = g(n_0)$, und hierzu wieder mittels (10a) $n_1 = f(q_1)$. Der Höhenfußpunkt im rechtwinkligen Dreieck (q_0, n_0), (q_1, n_0), (q_1, n_1) gibt dann eine verbesserte Näherung, mit deren Realteil

$$(11) \qquad q_2 = q_0 + (q_1 - q_0)\cos^2\varrho, \quad \operatorname{tg}\varrho = \frac{n_1 - n_0}{q_1 - q_0}$$

das Verfahren wiederholt werden kann, wobei es durchaus angängig ist, mit demselben Richtungswinkel ϱ weiterzurechnen. Einige auf diese Weise ermittelte Werte sind in der obigen Tabelle wiedergegeben.

5. Durch *Linearkombination* zweier konjugiert-komplexer Elementarlösungen mittels konjugiert-komplexer Koeffizienten gelangt man zu *reellen Lösungen* der Bauart

$$(12) \qquad h(\varphi) = \frac{1}{2}(a + ib)\, e^{(q+in)\varphi} + \frac{1}{2}(a - ib)\, e^{(q-in)\varphi} = e^{q\varphi}(a\cos n\varphi - b\sin n\varphi),$$

die jetzt näher untersucht werden sollen. Durch Drehung des Koordinatensystems und Maßstabsnormierung läßt sich die vereinfachte Normalform

$$(13) \qquad h(\varphi) = e^{q\varphi}\sin n\varphi$$

erreichen, die im folgenden zugrundegelegt wird. Die Konstanten q und n mögen vorerst *beliebig*, also noch nicht durch (9a, b) abgestimmt sein. Ausgeschlossen seien nur die Werte $q = 0$, $n = 0$ und $n = \pm 1$.

Die durch die Funktion (13) definierte Ebenenschar (2) kann in der Weise *kinematisch* erzeugt werden, daß man die zu $\varphi = 0$ gehörige Ebene $\sigma(y = z)$ einem *„gedämpften harmonischen Umschwung"* unterwirft, d. h. einer Bewegung, die sich aus einer gleichförmigen Drehung um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit 1 und einer gedämpften Sinusschwingung längs der z-Achse mit der Frequenz n und der Dämpfung q zusammensetzt. Von der *„Umschwungtorse"* Γ, die die Ebene σ im Verlauf der Bewegung umhüllt, interessieren vor allem die durch (4) dargestellte *Gratlinie* c, deren *Planevolute* c_1, sowie die in der Grundebene $z = 0$ verlaufende *Spurkurve* c_0, die eine ausgezeichnete Filarevolvente von c ist.

Vorausgeschickt sei, daß der *ungedämpfte* harmonische Umschwung ($q = 0$) bereits ausführlich von W. Kautny [6] untersucht worden ist, insbesondere auch hinsichtlich der von einer Ebene erzeugten Umschwungstorsen Γ. Deren Gratlinien c erwiesen sich als identisch mit den wohlbekannten *Böschungslinien auf Drehquadriken* Φ mit lotrechter Achse (Ellipsoide für $|n| < 1$, einschalige Hyperboloide für $|n| > 1$). Die Spurkurven c_0 dieser Torsen Γ sind *Radlinien* (Epizykloiden für $|n| < 1$, Hypozykloiden für $|n| > 1$). Der Grundriß c' von c ist jeweils die Evolute von c_0 und zu c_0 ähnlich. Die Planevolute c_1 von c ist eine gleichartige Böschungslinie und zu c im allgemeinen affin [3], jedoch sogar ähnlich, falls der Steigwinkel den Betrag $\frac{\pi}{4}$ hat. Es wird zu klären sein, inwieweit sich diese Eigenschaften unter dem Einfluß hinzukommender Dämpfung modifizieren[4]).

6. Zur Identifizierung der *Spurkurve* c_0 der Umschwungstorse Γ setzen wir in (2) $z = 0$ und substituieren in (13)

$$n = 1 - m, \quad q = mp. \tag{14}$$

Die Tangentengleichung von c_0 schreibt sich dann

$$x \sin\varphi - y\cos\varphi = e^{mp\varphi}(\cos m\varphi \sin\varphi - \sin m\varphi \cos\varphi). \tag{15}$$

Hieraus ist abzulesen, daß die Spurtangente mit dem Richtungswinkel φ den Punkt

$$M \ldots X = e^{pm\varphi}\cos m\varphi, \quad Y = e^{pm\varphi}\sin m\varphi \tag{16}$$

enthält, der eine *logarithmische Spirale* l_0 mit der Polargleichung $R = e^{p\theta}$ beschreibt. Damit hat man eine einfache *kinematische Erzeugung* der Spurkurve c_0: Sie wird von einer beweglichen Geraden eingehüllt, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit 1 um einen ihrer Punkte M dreht, während dieser gleichzeitig mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit m auf einer logarithmischen Spirale wandert; der feste Kurswinkel β dieser „Leitspirale" l_0 ist durch $\cot\beta = p$ bestimmt. Für die so erklärten Kurven hat der Verfasser in einer speziell ihnen gewidmeten Untersuchung [10] den Namen *„Spiraloiden"* vorgeschlagen, weil sie auf dieselbe Art von einer logarithmischen Spirale ($p \neq 0$) abgeleitet erscheinen, wie die „Zykloiden" vom Kreis ($p = 0$)[5]). Diese bemer-

[4]) Für die von W. Blaschke [3] bemerkte Eigenschaft, daß die Böschungslinien auf der Drehquadrik auch deren *D-Linien* darstellen, da ihre Schmiegkugeln die Fläche berühren, läßt sich anscheinend keine Analogie finden. Im vorliegenden Zusammenhang ist aber vielleicht der Hinweis von Interesse, daß die D-Linien der Quadriken die einzigen Raumkurven sind, die mit ihrer Planevolute punktweise durch eine *Affinität* zusammenhängen [11].

[5]) Die geschilderte Bewegung der erzeugenden Geraden kann überdies so erhalten werden, daß eine logarithmische Spirale, die ihren Mittelpunkt in M hat, auf einer festen (zu l_0 kongruenten) Spirale l_1 abrollt. Im Falle der Zykloiden sind diese Rollkurven Kreise.

kenswerten Kurven — bei welchen man in Analogie zu den Zykloiden noch zwischen „Epispiraloiden“ ($|n|<1$) und „Hypospiraloiden“ ($|n|>1$) unterscheiden kann — bestehen aus einer unendlichen Folge von untereinander ähnlichen Elementarbögen, die in Spitzen aneinandergeheftet sind (Abb. 2). Die Spiraloiden gestatten wie die Zykloiden noch eine zweite Erzeugung der gleichen Art und sind wie jene *zu ihrer Evolute ähnlich*. In dieser Eigenschaft finden sie bereits eine flüchtige Erwähnung bei V. A. Puiseux [8]; ein dabei unterlaufenes Versehen, solche Spiraloiden betreffend, die zu ihrer Evolute *kongruent* sind, berichtigten C. A. Crommelin und W. van der Woude [4]. Daß unter den Spiraloiden auch *Autoevoluten* vorkommen, hob der Verfasser hervor [9].

Aus dem Gesagten folgt jedenfalls für die Böschungslinie c, daß ihr *Grundriß* c' — als Evolute der Spurkurve c_0 — eine *zu* c_0 *ähnliche Spiraloide* ist (Abb. 2). Die damit

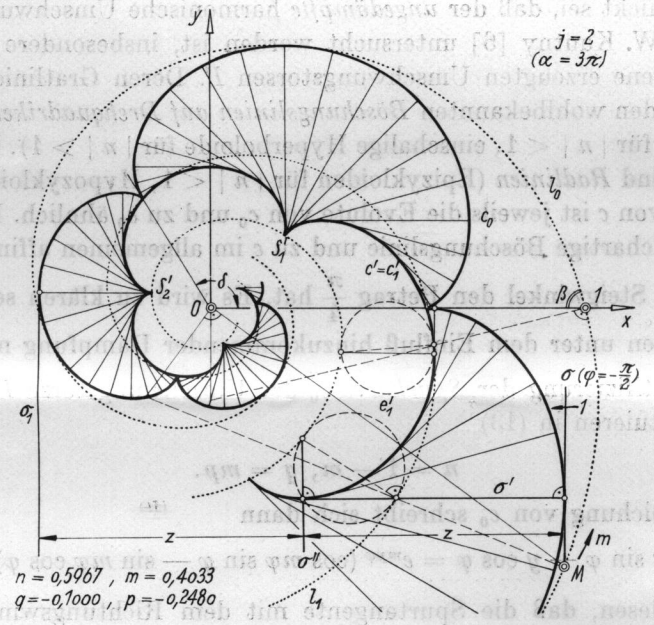

Abb. 2: Grundriß c' einer Böschungslinie c, die mit ihrer Planevolute c_1 zusammenfällt, samt Filarevolvente $c_0 \sim c'$ (Epispiraloiden).

ersichtlich werdenden *Spitzen* von c sind gekennzeichnet durch die Bedingung $h'+h'''=0$, das ist ausgeführt

$$\operatorname{tg} n\varphi = -\frac{n(1+3q^2-n^2)}{q(1+q^2-3n^2)}. \tag{17}$$

7. Was nun die *Planevolute* c_1 von c anlangt, so ist sie im allgemeinen *zu c ähnlich* da die in ihrer Schmiegebenengleichung (5) auftretende Funktion $h'+2h''$ wieder die Bauart (12) aufweist, mit denselben Kennzahlen n (Frequenz) und q (Dämpfung) wie h selbst.

Die *Ähnlichkeitstransformation* $\mathfrak{A}$, welche c in c_1 überführt, ist eine Drehstreckung, die sich aus einer Drehung um die z-Achse und einer zentrischen Streckung vom Ursprung aus zusammensetzt. Um den *Drehwinkel* γ und den *Streckfaktor* g von $\mathfrak{A}$ zu ermitteln, ist die Bedingung aufzustellen, daß die Schmiegebene σ von c (2) vermöge $\mathfrak{A}$ in die Schmiegebene σ_1 von c_1 (5) übergeht, wobei jedoch verschiedene Parameterwerte vorzusehen sind.

Es müssen also die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &x \sin(\varphi+\gamma) - y\cos(\varphi+\gamma) + z = g\cdot e^{q\varphi}\sin n\varphi \text{ und} \\ &-x\sin\psi + y\cos\psi + z = e^{q\psi}[(1+2q^2-2n^2)\sin n\psi + 4qn\cos n\psi] \end{aligned} \tag{18}$$

dieselbe Ebene darstellen. Dies erfordert zunächst $\varphi+\gamma = \psi+\pi$, also

$$\varphi = \psi + \alpha \text{ mit } \alpha = \pi - \gamma, \tag{19}$$

ferner

$$\begin{aligned} g\cdot e^{q\alpha}\cos n\alpha &= 1+2q^2-2n^2, \\ g\cdot e^{q\alpha}\sin n\alpha &= 4qn. \end{aligned} \tag{20}$$

Hieraus sind bei gegebenem q und n die Kenngrößen g und α der Ähnlichkeit $\mathfrak{A}$ leicht zu berechnen; α und damit der Drehwinkel $\gamma = \pi - \alpha$ sind allerdings nur bis auf ganzzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{n}$ bestimmt, c und c_1 sind demnach unendlichfach zueinander ähnlich.

Daraus folgt — wie in der Ebene bei den Spiraloiden —, daß sowohl c als auch c_1 unendlichfach *zu sich selbst ähnlich* sind. Sind $\mathfrak{A}_1(\gamma_1, g_1)$ und $\mathfrak{A}_2(\gamma_2, g_2)$ zwei benachbarte Ähnlichkeiten, die c nach c_1 bringen, dann ist $\mathfrak{A}_2^{-1}\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}(\pi+\delta, d)$ eine Ähnlichkeit, die c in sich transformiert. Für die Kenngrößen dieser *primitiven Automorphie* $\mathfrak{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\pi+\delta = \gamma_1-\gamma_2 = \alpha_2-\alpha_1 = \frac{\pi}{n}, \\ &d = -\frac{g_1}{g_2} = -e^{q(\alpha_2-\alpha_1)} = -e^{p\delta} \text{ mit } \delta = \frac{m\pi}{n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Die von dieser gegensinnigen Ähnlichkeit erzeugte, c und damit auch $c_1, c_2, \ldots$ festlassende *diskontinuierliche Gruppe* $\mathfrak{B}^\lambda$ (λ ganz) enthält die *Untergruppe* $\mathfrak{B}^{2\lambda}$, erzeugbar durch die gleichsinnige Ähnlichkeit $\mathfrak{B}^2$ mit dem Drehwinkel $2(\pi+\delta) \equiv 2\delta = \frac{2\pi m}{n}$ und dem Streckfaktor $d^2 = e^{2p\delta}$.

Diese Automorphien sind kennzeichnend für die morphologische Struktur der Kurve c. Ein von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Spitzen S_1, S_2 begrenzter Elementarbogen von c wird durch die gegensinnige Ähnlichkeit $\mathfrak{B}$ in den anschließenden Bogen S_2S_3 transformiert usf. (Abb. 2); wegen $d<0$ liegen die Spitzen von c abwechsend zu verschiedenen Seiten der Grundebene $z=0$, was einen zickzackförmigen Verlauf der Böschungslinie bedingt (Abb. 3). — Die gleichsinnige Ähnlichkeit $\mathfrak{B}^2$ wiederum läßt sich in eine *kontinuierliche Gruppe*

$$\begin{aligned} x &= e^{p\tau}(x_0\cos\tau - y_0\sin\tau), \\ y &= e^{p\tau}(x_0\sin\tau + y_0\cos\tau), \\ z &= e^{p\tau}\cdot z_0 \end{aligned} \tag{22}$$

einbetten, die, auf die Bögen S_1S_2 und S_2S_3 angewendet, eine aus zwei Mänteln bestehende *Spiralfläche* Φ_1 erzeugt, auf der die ganze Böschungslinie c verläuft. Die beiden Mäntel hängen in zwei Rückkehrkanten längs der (zylindrokonischen) Bahnspiralen von S_1 und S_2 zusammen und durchsetzen einander längs einer logarithmischen Spirale in der Grundebene $z=0$ (Abb. 3).

Sucht man im übrigen Kurven c aus der Familie (13), die zu ihrer Planevolute *kongruent* sind, so ist in den Bedingungen (20) der Streckfaktor $g = 1$ (gleichsinnige Kongruenz) oder $g = -1$ (gegensinnige Kongruenz) zu setzen, wobei das Supplement α des Drehwinkels γ noch beliebig vorgeschrieben werden kann. Beispielsweise erhält man für $g = 1$ und $\alpha \equiv \pi \left(\mathrm{mod}\, \frac{2\pi}{k}\right)$ mit ganzem k Kurven $c = c_k$, also *Böschungslinien, die mit ihrer k-ten Planevolute zusammenfallen.* Insbesondere gelangt man mit $k = 1$ wieder zu den durch (9a, b) gekennzeichneten *Autoevoluten* $c = c_1$ zurück, die den Ausgang bildeten.

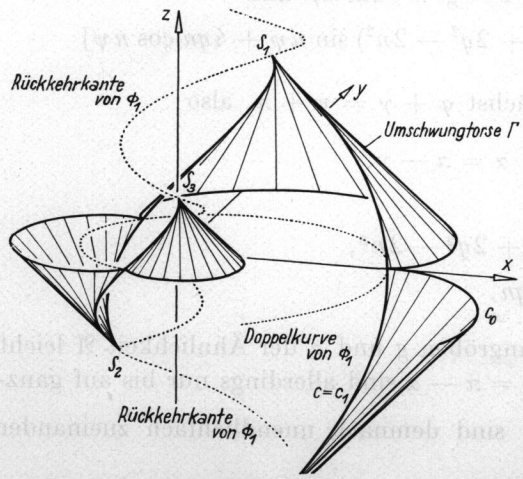

Abb. 3: Axonometrische Darstellung der der Abb. 2 zugrundeliegenden Umschwungstorse Γ.

8. Die vorhin erwähnte Spiralfläche Φ_1 ist eine in natürlicher Weise ausgezeichnete Trägerfläche der Böschungslinie c, die deren Strukturgruppe besonders angepaßt ist. An und für sich lassen sich jedoch mehrere die Kurve c enthaltende *Spiralflächen* angeben, die die Zusatzforderung erfüllen, eine möglichst einfache Erzeugende zu besitzen.

Zur Erleichterung der Übersicht soll die komplexe Schreibweise herangezogen werden. Die Gleichungen (4) der Kurve c vereinfachen sich dann zu

$$(23)\qquad c\begin{cases} x + iy = (h' + ih'')\, e^{i\varphi} = e^{q\varphi}(Ae^{(1+n)i\varphi} + Be^{(1-n)i\varphi}), \\ z = h + h'' = e^{q\varphi}(Ce^{ni\varphi} + \bar{C}e^{-ni\varphi}) \end{cases}$$

$$\text{mit } A = \frac{1}{2}(r^2 - ir),\ B = \frac{1}{2}(ir - \bar{r}^2),\ C = -\frac{i}{2}(1 + r^2),\ r = q + in.$$

Wenden wir auf c die nach dem Muster (22) mit festem λ gebildete „Spiralung" (kontinuierliche Ähnlichkeitsgruppe [12])

$$(24)\qquad x^* + iy^* = e^{\lambda q\tau}(x + iy) \cdot e^{i\tau},\ z^* = e^{\lambda q\tau} \cdot z$$

an, so entsteht eine c tragende Spiralfläche, auf welcher φ und τ als Flächenkoordinaten dienen können. Als besonders einfache Erzeugende bietet sich die Flächenkurve $\varphi + \lambda\tau = 0$ an. Ihre Gleichungen lauten, wenn man $n\varphi = \psi$ und

$$(25)\qquad \frac{\lambda - 1}{\lambda n} = \mu,\ \text{also}\ \lambda = \frac{1}{1 - \mu n}$$

setzt:

$$(26)\qquad e_\mu \ldots x^* + iy^* = Ae^{(\mu+1)i\psi} + Be^{(\mu-1)i\psi},\ z^* = Ce^{i\psi} + \bar{C}e^{-i\psi}.$$

Für rationales μ erhält man eine *rational-algebraische Erzeugende* e_μ, insbesondere für $\mu = 0$ eine im Ursprung zentrierte *Ellipse* e_0. Denkt man sich in (26) den Faktor $e^{-ni\psi}$ herausgehoben, so erkennt man folgende kinematische Entstehung der allgemeinen Erzeugenden e_μ: Sie wird von einem beweglichen Punkt beschrieben, der mit konstanter Flächengeschwindigkeit die Ellipse e_0 durchläuft, während diese sich gleichförmig um die z-Achse dreht. Alle Erzeugenden e_μ verlaufen daher auf der von e_0 bei der Rotation überstrichenen Drehfläche 4. Ordnung. Der Grundriß von e_μ ist eine Radlinie mit der Charakteristik $(\mu + 1) : (\mu - 1)$.

Die *Spiralfläche* Φ_μ, die von e_μ unter Einwirkung der Spiralung (24) mit dem Spiralparameter $\lambda q = \frac{q}{1-\mu n}$ erzeugt wird, ist nach dem Gesagten eine Trägerfläche der Böschungslinie c. Besonders hervorzuheben ist die zu $\mu = 1$ gehörige Trägerfläche Φ_1, die den Spiralparameter $\frac{q}{m} = p$ aufweist und bereits eingangs erwähnt wurde. Ihre Erzeugende e_1 ist eine sogenannte „Hippopede", das ist eine rationale Raumkurve 4. Ordnung, die als Schnitt einer Kugel mit einem berührenden Drehzylinder erklärt werden kann; dieser Zylinder ist im vorliegenden Fall z-parallel, wie aus dem kreisförmigen Grundriß $x^* + iy^* = B + Ae^{2i\varphi}$ hervorgeht (Abb. 2).

9. Die wichtigsten Ergebnisse der Abschnitte 5 bis 8 seien jetzt zusammengefaßt im nachstehenden

Satz I. *Unter der Wirkung eines gedämpften harmonischen Umschwungs* (13) *mit der Frequenz* $n \neq 0, \pm 1$ *und der Dämpfung* $q \neq 0$ *umhüllt eine die Achse unter dem Winkel* $\frac{\pi}{4}$ *schneidende Ebene* (2) *eine Torse, deren Gratlinie zu ihrer Planevolute ähnlich ist. Diese Gratlinie ist eine Böschungslinie, die sich im Normalriß auf eine zur Achse normale Ebene als Spiraloide abbildet und eine zu dieser Spiraloide ähnliche Filarevolvente besitzt. Die Gratlinie gestattet eine diskontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeiten und gehört einer abzählbar unendlichen Menge von Spiralflächen mit rational-algebraischen Erzeugenden an. — Die Gratlinie fällt mit ihrer Planevolute zusammen, wenn n und q den Bedingungen* (9a, b) *genügen.*

Die zu den ausgeschlossenen Werten der Kenngrößen gehörigen Annahmen würden nur geringfügige Modifikationen erfordern. Der Hauptteil der Feststellungen bleibt daher aufrecht; die grundsätzlichen Unterschiede sind anschließend kurz angedeutet.

$n = 0$: Die Torse Γ ist eine Spiraltorse [12], ihre Gratlinie ist eine zylindrokonische Spirale (Drehkegelloxodrome). Dieselbe erscheint im Grundriß als logarithmische Spirale und besitzt eine dazu kongruente Kurve als Filarevolvente. Sie gestattet eine kontinuierliche Gruppe von Ähnlichkeiten.

$n = \pm 1$: Anstelle der Spiraloiden treten als Grundriß und als Filarevolvente der Böschungslinie sogenannte „Logarithmoiden" auf. Diese Grenzformen sind dadurch gekennzeichnet, daß die in Abschn. 6 genannten Leitspiralen l_1 bzw. l_0 zu Geraden ausarten. Die diskontinuierliche Automorphiengruppe $\mathfrak{B}^{2\lambda}$ besteht aus zentrischen Streckungen und unter den Trägerspiralflächen findet sich als Grenzform (Φ_1 bzw. Φ_{-1}) ein algebraischer Kegel 4. Ordnung.

$q = 0$: Dies ist der Fall des ungedämpften harmonischen Umschwungs, der in Abschn. 5 bereits gestreift wurde. Sämtliche Trägerflächen Φ_μ fallen in einer einzigen Drehquadrik zusammen, auf der die Böschungslinie verläuft.

Die Inzidenzbedingungen (9a, b) sind in keinem der Sonderfälle erfüllbar. Hingegen sei bei dieser Gelegenheit ausdrücklich darauf hingewiesen, daß man verschiedene Lösungen (12), deren Kenngrößen n_s, q_s den Bedingungen (9a, b) mit demselben α genügen, linear kombinieren kann. Die so gebildete Funktion

$$h(\varphi) = \sum_s a_s e^{q_s\varphi} \sin n_s(\varphi - \varepsilon_s) \tag{27}$$

ist wieder eine Lösung der Schlüsselgleichung (6) und kennzeichnet gleichfalls eine Böschungslinie, die mit ihrer Planevolute zusammenfällt, also eine räumliche *Autoevolute* darstellt. Ihre Tangentenfläche ist in erweitertem Sinne auch noch als Umschwungtorse

aufzufassen, wobei die Schwingung mehrfach zusammengesetzt ist. Die Berücksichtigung der trivialen Komponente $q = 0$, $n = \pm 1$ ist dabei belanglos, da sie lediglich eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems bewirkt.

10. Die dargelegte Methode zur Ermittlung von Böschungslinien c, die mit ihrer ersten Planevolute c_1 zusammenfallen, läßt sich ohne weiteres ausdehnen auf Böschungslinien, die sich mit einer ihrer höheren *Planevolute ungerader Ordnung* decken. Mit Benützung des Differentialoperators

$$D = 1 + 2\frac{d^2}{d\varphi^2} \tag{28}$$

schreibt sich die der Schmiegebene σ (2) von c zugeordnete Schmiegebene σ_k von c_k bei ungerader Ordnung k:

$$\sigma_k \ldots - x \sin\varphi + y\cos\varphi + z = D^k h. \tag{29}$$

Die Forderung $c = c_k$ läuft dann in Verallgemeinerung von (6) auf die Bedingung

$$D^k h(\varphi) = h(\varphi + \alpha) \text{ mit } \alpha \equiv \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi) \tag{30}$$

hinaus. *Elementarlösungen* $h = e^{r\varphi}$ der Schlüsselgleichung (30) erhält man durch Auflösung der transzendenten Gleichung

$$(1 + 2r^2)^k = e^{\alpha r} \text{ mit } \alpha = (2j - 1)\pi. \tag{31}$$

Diese Gleichung für r besitzt unter der Voraussetzung $k \geqq 3$ nunmehr auch bereits *reelle* Lösungen, wie aus Fußnote 2 gefolgert werden kann. Zu $k = 3$ und $j = 1$ etwa gehören die Werte $r = 0{,}8386$ und $2{,}4489$. Die durch reelle r-Werte bestimmten Böschungslinien sind *zylindrokonische Spiralen* $c = c_k$, die mit ihrer ersten Planevolute c_1 durch eine Drehung um den Winkel $\pi - \left(\frac{\alpha}{k}\right)$ zusammenhängen (vgl. Abschn. 7).

Komplexe Lösungswerte $r = q + in$ von (31) sind durch ein Gleichungspaar

$$\begin{aligned} e^{\frac{\alpha q}{k}} \cdot \cos\frac{\alpha n + 2l\pi}{k} &= 1 + 2q^2 - 2n^2, \\ e^{\frac{\alpha q}{k}} \cdot \sin\frac{\alpha n + 2l\pi}{k} &= 4qn \text{ mit } l = 0, 1, \ldots, k-1 \end{aligned} \tag{32}$$

bestimmt, das nach dem für $k = 1$, $l = 0$ entwickelten Muster in Abschn. 4 behandelt werden kann. Die zu zwei konjugiert-komplexen Lösungswerten $r, \bar{r}$ gehörigen reellen Böschungslinien sind von der in Satz I gekennzeichneten Bauart.

11. Bei der Frage nach Böschungslinien, die mit einer ihrer *Planevoluten gerader Ordnung* zusammenfallen, wird die bisher notwendige Einschränkung des Steigwinkels auf $\omega = \frac{\pi}{4}$ überflüssig. Setzt man die Schmiegebene σ der Böschungslinie c mit beliebigem Steigwinkel ω an durch

$$\sigma \ldots x \sin\varphi - y\cos\varphi + z\cot\omega = h(\varphi), \tag{33}$$

dann erhält man ähnlich wie in Abschn. 3 für die Normalebene σ_1 (Schmiegebene der Planevolute c_1) die Darstellung

$$\sigma_1 \ldots - x\sin\varphi + y\cos\varphi + z\,\mathrm{tg}\,\omega = D_1 h \text{ mit } D_1 = \mathrm{tg}^2\omega + \sec^2\omega\frac{d^2}{d\varphi^2}, \tag{34}$$

und analog für die Schmiegebene σ_2 der zweiten Planevolute c_2:

$$\sigma_2 \ldots x \sin\varphi - y\cos\varphi + z\cot\omega = D_2 D_1 h \text{ mit } D_2 = \cot^2\omega + \csc^2\omega \frac{d^2}{d\varphi^2}. \tag{35}$$

Allgemein lautet die Darstellung der Schmiegebene $\sigma_{2\nu}$ von $c_{2\nu}$:

$$\sigma_{2\nu} \ldots x \sin\varphi - y\cos\varphi + z\cot\omega = (D_2 D_1)^\nu h$$
$$\text{mit } D_2 D_1 = 1 + \sec^2\omega \csc^2\omega \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \frac{d^4}{d\varphi^4}\right). \tag{36}$$

Die gesuchten Böschungslinien $c = c_{2\nu}$ sind demnach, wie der Vergleich von (33) und (36) lehrt, durch die *Schlüsselgleichung*

$$(D_2 D_1)^\nu \cdot h(\varphi) = h(\varphi + \alpha) \text{ mit } \alpha \equiv 0 \pmod{2\pi} \tag{37}$$

charakterisiert. Deren *Elementarlösungen* $h = e^{r\varphi}$ sind bestimmt durch

$$\left(1 + \frac{r^2 + r^4}{\sin^2\omega \cos^2\omega}\right)^\nu = e^{\varkappa r} \text{ mit } \varkappa = 2j\pi. \tag{38}$$

Reelle r-Werte führen wieder auf zylindrokonische Spiralen, konjugiert-komplexe Wertepaare auf Böschungslinien vom Typus aus Satz I. Die numerische Ermittlung komplexer r-Werte kann im wesentlichen auf die gleiche Art wie bei (8) und (31) erfolgen, verlangt jedoch erhöhten Aufwand.

12. Eine Sonderstellung kommt der Annahme $\alpha = 0$ in (37) zu, die das *punktweise Übereinstimmen* der Kurven c und $c_{2\nu}$ kennzeichnet. Jetzt reduziert sich die Funktionalgleichung (37) auf eine *gewöhnliche lineare Differentialgleichung* 4ν-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die in üblicher Weise zu behandeln ist. Die charakteristische Gleichung (38) ist auf ν biquadratische Gleichungen

$$r^4 + r^2 + \left(1 - e^{\frac{2li\pi}{\nu}}\right) \sin^2\omega \cos^2\omega = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, \nu - 1) \tag{39}$$

zurückführbar, die ein Fundamentalsystem partikulärer Integrale liefern.

Der einfachste Fall $\nu = 1$ führt lediglich auf die gewöhnlichen (euklidischen) *Schraublinien* $c = c_2$.

Der nächste Fall $\nu = 2$ soll der Einfachheit halber wie bei R. Lagrange [7] nur für $\omega = \frac{\pi}{4}$ betrachtet werden. Das Gleichungspaar (39) lautet dann

$$4r^4 + 4r^2 + 1 = \pm 1 \tag{40}$$

und hat die Wurzeln

$$r_{1,2} = 0,\ r_{3,4} = \pm i;\ r_{5,6} = -r_{7,8} = q \pm in$$
$$\text{mit } q = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0{,}3218 \text{ und } n = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1} = 0{,}7769. \tag{41}$$

Mit Unterdrückung der Bestandteile, die bloß eine Parallelverschiebung der Lösungskurve im Koordinatensystem bewirken, kann die vollständige Lösung folgendermaßen angeschrieben werden:

$$h = e^{q\varphi}(A_1 \sin n\varphi + B_1 \cos n\varphi) + e^{-q\varphi}(A_2 \sin n\varphi + B_2 \cos n\varphi) + C\varphi. \tag{42}$$

Über (4) ist damit eine explizite Parameterdarstellung der unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$ ansteigenden Böschungslinien $c = c_4$ gewonnen, die bei R. Lagrange durch ihre natürliche Gleichung beschrieben erscheinen.

Literatur

[1] *M. Barner*, Géométrie différentielle de figures qui se ferment. 2e Colloque Géom. diff. Liège 1961, 29—44.

[2] *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. Berlin, 2. Aufl. 1924, 18ff.

[3] *W. Blaschke*, Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatsh. Math. Phys. **19** (1908), 188—204.

[4] *C. A. Crommelin-W. van der Woude*, Quelle courbe est égale à sa dévéloppée? Un cas simple. Simon Stevin **30** (1953), 17—24.

[5] *W. Hahn*, Bericht über Differential-Differenzengleichungen mit festen und veränderlichen Spannen. Jber. DMV **57** (1954), 55—84.

[6] *W. Kautny*, Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. **60** (1956), 66—82.

[7] *R. Lagrange*, Sur les spèhres osculatrices et las arêtes de courbure successives d'une courbe. J. math. pur. appl. **39** (1960), 33—62.

[8] *V. A. Puiseux*, Problèmes sur les développées et les développantes des courbes planes. J. math. pur. appl. **9** (1844), 377—399.

[9] *W. Wunderlich*, Autoevoluten. Elem. Math. **17** (1962), 121—128.

[10] *W. Wunderlich*, Sur une certaine généralisation des cycloïdes. Simon Stevin **36** (1962), 57—71.

[11] *W. Wunderlich*, Eine kennzeichnende Eigenschaft der D-Linien von Quadriken. Monatsh. Math. **55** (1951), 76—81.

[12] *W. Wunderlich*, Darstellende Geometrie der Spiralflächen. Monatsh. Math. Phys. **46** (1938), 248—265.

Eingegangen 22. Dezember 1962