Zyklische Strahlkomplexe und geodätische Linien auf euklidischen und nichteuklidischen Dreh- und Schraubflächen

Von

W. WUNDERLICH

I. Euklidischer Fall

§ 1. Eine Schraubung des dreidimensionalen euklidischen Raums kann in inhomogenen kartesischen Koordinaten dargestellt werden durch

(1.1)
$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$
, $y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$, $z' = z + m \varphi$,

wobei mit m=0 der Grenzfall der Drehung eingeschlossen ist.

Diese Bewegung weist jedem Raumpunkt X, festgelegt durch den Ortsvektor $OX=\mathfrak{x}(x,y,z)$, einen Bahntangentenvektor $\mathfrak{t}(-y,x,m)$ zu. Wir denken uns in jedem Punkt X einen Drehkegel Γ mit der Achsenrichtung \mathfrak{t} angebracht, über dessen von X abhängigen Öffnungswinkel 2ω noch verfügt werden soll. Wir fragen nämlich: Ist es möglich, ω so festzusetzen, daß die Erzeugenden sämtlicher ∞^3 Kegel Γ nur eine dreiparametrige Mannigfaltigkeit, also einen Strahlkomplex erfüllen?

Bezeichne $\mathfrak p$ den *Richtungsvektor* einer Erzeugenden $p \in \Gamma$ und $\overline{\mathfrak p} = \mathfrak x \times \mathfrak p$ den *Momentenvektor* von $\mathfrak p$ bezüglich des Ursprungs O. Die beiden Vektoren $\mathfrak p(p_1,p_2,p_3)$ und $\overline{\mathfrak p}(p_4,p_5,p_6)$ fassen dann die sechs Plücker-Koordinaten p_i der Erzeugenden zusammen und genügen der bekannten Plücker-Bedingung $\mathfrak p \overline{\mathfrak p} = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$. Mittels des Winkels $\omega = \not\prec \mathfrak p t$ drückt sich das Skalarprodukt $\mathfrak p t$ dann aus durch

(1.2)
$$\mathfrak{p} \mathfrak{t} = |\mathfrak{p}| \cdot |\mathfrak{t}| \cdot \cos \omega.$$

In Koordinaten geschrieben gilt daher:

(1.3)
$$(\underline{-p_1 y + p_2 x} + p_3 m)^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(\underline{x^2 + y^2} + m^2)\cos^2 \omega.$$

Setzt man also ω so fest, daß das Produkt der letzten beiden Faktoren konstant ist, so hat man als Antwort auf die gestellte Frage:

Satz 1. Bringt man in jedem Raumpunkt einen Drehkegel Γ an, dessen Achse die Bahntangente des Punktes für eine Schraubung um die z-Achse mit der Ganghöhe $2\pi m$ ist, und legt man den Öffnungswinkel 2ω von Γ in Abhängigkeit vom Achsenabstand r der Kegelspitze durch

$$(1.4) \sqrt{r^2 + m^2} \cdot \cos \omega = c = \text{const}$$

fest, so erfüllen die Erzeugenden aller ∞^3 Kegel Γ bloß einen Strahlkomplex

(1.5)
$$\mathbb{C} \dots c^2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = (m p_3 + p_6)^2.$$

Im Sonderfall c=0 ist $\omega=\pi/2$, die Drehkegel Γ sind zu den Bahnnormalebenen der Schraubung (1.1) abgeplattet, und $\mathfrak C$ ist das doppelt zu zählende Möbiussche Normalengewinde

(1.6)
$$\mathfrak{C}_0 \dots mp_3 + p_6 = 0.$$

Dieser lineare Komplex artet im Falle der Drehung (m=0) in das Strahlgebüsch $p_6=0$ aus.

Im allgemeinen Fall $c \neq 0$ handelt es sich bei $\mathfrak C$ um einen metrisch speziellen quadratischen Strahlkomplex, den C. Segre [6] näher betrachtet hat und den später E. Study [9] den "zyklischen" Strahlkomplex nannte. Grund hierfür ist die Tatsache, daß einerseits alle Komplexkegel Drehkegel, anderseits alle ebenen Komplexkurven Kreise sind. Die Komplexkegel sind natürlich die Drehkegel Γ , und die Existenz der Komplexkreise ist folgendermaßen einzusehen: Seien p und p' zwei nicht parallele Komplexstrahlen in einer festen Ebene α , die nicht parallel zur z-Achse liege; p und p' gehören dann dem Komplexkegel Γ ihres Schnittpunktes X an und eine der beiden Winkelsymmetralen ist daher Bahnnormale von X. Sie ist also in dem Normalengewinde $\mathfrak C_0$ enthalten und geht demnach durch den Nullpunkt Λ von Λ bezüglich Λ 0. Hält man nun Λ 1 fest und läßt Λ 2 innerhalb von Λ 2 variieren, so erkennt man, daß alle in Λ 2 verlaufenden Komplexstrahlen gleichen Abstand von Λ 3 haben, also einen Kreis Λ 4 mit dem Mittelpunkt Λ 4 einhüllen.

Der zyklische Komplex $\mathfrak C$ kann mithin, wie dies bei E. Study geschieht, dadurch erzeugt werden, daß man die ∞^1 Erzeugenden eines Drehkegels Γ_0 oder die ∞^1 Tangenten eines Kreises k_0 allen ∞^2 Schraubtransformationen um eine Achse z unterwirft, welche einen zur Drehachse von Γ_0 normalen Scheitelstrahl bzw. einen Durchmesser von k_0 rechtwinklig trifft Γ_0).

§2. Der Komplexkegel zerfällt, wenn $\omega = 0$ ist, und zwar in zwei Minimalebenen (Tangentialebenen des absoluten Kegelschnittes u). Dies tritt gemäß (1.4) für jene Punkte X_0 ein, die dem *Drehzylinder*

(2.1)
$$\Delta \dots x^2 + y^2 = b^2 = c^2 - m^2$$

angehören. Dieser (nicht unbedingt reelle) Zylinder Δ ist als Ort "singulärer Punkte" X_0 ein Bestandteil der Singularitätenfläche von $\mathfrak C$. Die genannten Minimalebenen (und damit alle) enthalten zerfallende Komplexkegelschnitte, sind also "singuläre Ebenen"; der von ihnen eingehüllte absolute Kegelschnitt u ist mithin der zu Δ duale Bestandteil der Singularitätenfläche. Die Singularitätenfläche eines quadratischen Komplexes (Kummersche Fläche) hat bekanntlich die Ordnung und die Klasse 4 [12]. Im vorliegenden Fall besteht sie als

 $^{^{1}}$) Man darf allerdings nicht übersehen, daß diese Erzeugung im Reellen nicht ausreicht, weil bei Beschränkung auf reelle Schraubtransformationen aus den reellen Erzeugenden von Γ_{0} bzw. den reellen Tangenten von k_{0} nur Komplexstrahlen bis zu einem gewissen Achsenabstand gewonnen werden, während es zufolge (1.4) reelle Komplexstrahlen in beliebig großer Entfernung von z gibt.

Punktgebilde (Ort aller singulären Punkte) aus dem Drehzylinder Δ und der doppelt zählenden Fernebene, als Ebenengebilde (Einhüllende aller singulären Ebenen) aus dem absoluten Kegelschnitt u und dem doppelt zählenden Achsenfernpunkt.

Nach der Theorie der quadratischen Komplexe wird die Singularitätenfläche von allen Komplexkegeln und Komplexkegelschnitten an je vier Stellen berührt. Beim zyklischen Komplex bedeutet das je eine Doppelberührung mit Δ und u. Die Doppelberührung mit u ist im Wesen des zyklischen Komplexes begründet²). Die Doppelberührung mit Δ soll anschließend auf elementarem Wege bestätigt werden.

Sei p_0 die Bahntangente eines singulären Punktes $X_0 \in A$, σ_0 seine Bahnschmiegebene und τ_0 die Tangentialebene des Drehzylinders Δ in X_0 . Die von p_0 erzeugte Schraubtorse wird von σ_0 längs p_0 berührt. Die Bahntangente t jedes weiteren Punktes $X \in p_0$ liegt daher in σ_0 . Wegen $\sigma_0 \perp \tau_0$ ist p_0 die Normalprojektion von t auf τ_0 . Der von X ausstrahlende Drehkegel Γ hat t zur Achse und enthält den Komplexstrahl p_0 , berührt also längs p_0 die Ebene τ_0 und daher in X_0 den Zylinder Δ . Aus Symmetriegründen existiert noch eine zweite Berührungsstelle. — Für den Sonderfall der Drehung (m=0) vereinfachen sich die Überlegungen.

Betrachten wir anderseits den Komplexkreis k einer Ebene α und beachten wir, daß für jeden Punkt $X \in k$ der Komplexkegel Γ die beiden in der Kreistangente p von X zusammengerückten Komplexstrahlen enthält, also die Ebene α längs p berührt, so kann p als Normalprojektion der Bahntangente t von X auf α aufgefaßt werden; t und p schließen dabei den zum Achsenabstand r von K gemäß (1.4) gehörigen Winkel ω ein. Ist nun K ein (sicher vorhandener) gemeinsamer Punkt von K und K0, so ist K1 und daher K20, und K3 berührt an dieser Stelle sowohl K3 als auch K3; aus Symmetriegründen gibt es zwei solche Berührungen.

Zusammenfassend gilt mithin:

Satz 2. Sämtliche Komplexkegel des zyklischen Strahlkomplexes \mathfrak{C} (1.5) sind Drehkegel, welche den Drehzylinder Δ (2.1) doppelt berühren. Alle Komplexkegelschnitte von \mathfrak{C} sind Kreise, welche den Zylinder Δ gleichfalls doppelt berühren.

Die dem zyklischen Komplex \mathfrak{C} $(c \neq 0)$ nach der Elementarteilertheorie zukommende *Charakteristik* hat für $c^2 \neq m^2$ $(b \neq 0)$ die Form [(22) 11], für $c^2 = m^2$ (b = 0) hingegen die Form [(22) 2]. \mathfrak{C} gehört mithin zum Typ 24 bzw. 25 der üblichen Klassifikation der quadratischen Strahlkomplexe [12]. Im Sonderfalle b = 0 artet der Drehzylinder Δ (2.1) in ein Minimalebenenpaar aus ³);

²) Jeder Komplexkegel Γ berührt als *Drehkegel* den absoluten Kegelschnitt u in zwei Punkten. Die "Doppelberührung" eines *Kreises k* mit u besagt — weil k und u hier als Klassengebilde aufzufassen sind — lediglich, daß k und u zwei Punkte gemeinsam haben, ohne daß daselbst die Tangenten übereinzustimmen brauchen.

³) Diese Möglichkeit hat C. Segre [6] nicht in Betracht gezogen, ebensowenig wie jene, daß Δ ein nullteiliger Drehzylinder sein kann ($c^2 < m^2$).

die Komplexkreise sind dann Loxodromen des Ebenenbüschels z [4, 11], alle Komplexkegel enthalten den Fernpunkt der z-Achse und die Relation (1.4) reduziert sich auf $r \cot \omega = m$. — Im Falle der Drehung (m=0) scheidet der Komplex [(22) 2] aus; der Komplex [(22) 11] nimmt hingegen wohl einfachere Struktur an, artet jedoch keineswegs aus.

- §3. Sei nun Φ eine beliebige, durch die Bewegung (1.1) erzeugte Dreh- oder Schraubfläche. Ein vorgelegter Lichtstrahl p treffe Φ in einem Punkt X, wo er durch Reflexion an der spiegelnd gedachten Oberfläche in den Strahl p' übergeht. $\mathfrak C$ bezeichne den durch p und die Bewegung eindeutig bestimmten zyklischen Komplex (1.5) oder, falls c=0, das Normalengewinde (1.6). Da p und p' mit der Bahntangente t von X gleiche Winkel bilden, gehören beide dem Komplexkegel Γ von X an; auch p' ist also ein Strahl von $\mathfrak C$. Wird dann p' an einer weiteren Stelle $X' \in \Phi$ durch Spiegelung in einen Strahl p'' umgelenkt, so gehört p'' aus demselben Grunde wieder zu $\mathfrak C$ usf. Es gilt mithin:
- Satz 3. Das durch wiederholte Spiegelung eines Lichtstrahls an einer Drehoder Schraubfläche entstehende Reflexionspolygon gehört mit seinen Seiten einem zyklischen Strahlkomplex $\mathfrak C$ an, im besonderen dem Normalengewinde $\mathfrak C_0$, sobald der Lichteinfall senkrecht zu einer Bahnkurve erfolgt.
- §4. Läßt man den Einfallswinkel, unter dem der Lichtstrahl p die Fläche Φ trifft, gegen Null abnehmen, so strebt das Reflexionspolygon gegen eine gewisse Flächenkurve l, wobei aus den Flächennormalen, die die Polygonwinkel halbieren, in der Grenze die Hauptnormalen von l werden: l wird daher eine geodätische Linie von Φ sein. Da auf diese Weise offenbar alle geodätischen Linien von Φ zu erhalten sind, ist zu erwarten, daß sämtliche Tangenten einer solchen Kurve einem zyklischen Komplex $\mathfrak C$ oder im besonderen dem Gewinde $\mathfrak C_0$ angehören. Das Ergebnis dieser nicht unanfechtbaren differenzengeometrischen Überlegung ist leicht unmittelbar zu bestätigen.

Sei $\mathfrak C$ ein zur Bewegung (1.1) gehöriger zyklischer Komplex oder das Normalengewinde. Jedem Punkt $X \in \Phi$ werden durch die beiden in der Tangentialebene liegenden Erzeugenden des Komplexkegels Γ von X zwei Fortschreitrichtungen zugewiesen. Die Integralkurven des so erklärten Feldes von Linienelementen auf der Fläche, welches durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben wird, sind die auf Φ verlaufenden Komplexkurven von $\mathfrak C$. Nun berührt bekanntlich ganz allgemein bei einer Komplexkurve l der von einem Punkt $X \in l$ ausgehende Komplexkegel Γ stets die zu X gehörige Schmiegebene σ von l längs der Kurventangente p. Im vorliegenden Falle ist Γ ein Drehkegel mit der Bahntangente t von X als Achse, so daß σ mit der von p und t aufgespannten Tangentialebene τ der Fläche einen rechten Winkel bildet. Dies ist aber das Kennzeichen dafür, daß die erwähnten Komplexkurven geodätische Linien der Fläche Φ sind.

Nachdem durch jedes vorgelegte Linienelement (X, p) von Φ im allgemeinen genau eine geodätische Linie und genau eine Komplexkurve des durch p bestimmten Komplexes $\mathfrak C$ gehen, sind diese Kurven identisch. Wir haben also:

Satz 4. Jede auf einer euklidischen Dreh- oder Schraubfläche gezogene geodätische Linie ist Komplexkurve eines zyklischen Strahlkomplexes \mathbb{C} oder im besonderen des Normalengewindes \mathbb{C}_0 .

Daß die Orthogonaltrajektorien der Bahnschraublinien einer Schraubfläche Gewindekurven und ausgezeichnete geodätische Linien sind, hat bereits E. Müller [3] erkannt⁴). Die allgemeinere Aussage von Satz 4 scheint jedoch nicht bekannt zu sein, ebensowenig die Umkehrung:

Satz 5. Wird eine beliebige Komplexkurve eines zyklischen Strahlkomplexes \mathbb{C} oder eines Gewindes \mathbb{C}_0 der erzeugenden Schraubung (Drehung) unterworfen, so überstreicht sie eine Schraubfläche (Drehfläche), auf der sie geodätische Linie ist.

Insbesondere ist ein Komplexkreis k geodätische Linie auf der von ihm erzeugten Schraubrohrfläche.

Die aus Satz 1 folgende Tatsache, daß längs einer geodätischen Linie auf einer Dreh- bzw. Schraubfläche zwischen dem Achsenabstand r und dem gegen die Parallelkreise bzw. Bahnschraublinien gemessenen Kurswinkel ω eine Beziehung nach dem Muster (1.4) besteht, ist der Inhalt des wohlbekannten Satzes von A. CLAIRAUT [1,2] für Drehflächen bzw. der Verallgemeinerung von R. SAUER [5] für Schraubflächen.

Legt man die Tangenten einer Komplexkurve $l \in \mathbb{C}$ durch ihren Berührungspunkt x und die Fortschreitrichtung dx fest, so gelangt man über (1.5) zu der kennzeichnenden Differentialgleichung

$$(4.1) c ds = y dx - x dy - m dz,$$

wobei ds das Bogenelement bezeichnet. Für Drehflächengeodätische (m=0) findet sich diese Gleichung bei G. LORIA [2].

§5. Der Vollständigkeit halber sei noch die Sachlage im Grenzfall $m=\infty$ kurz beleuchtet. Die zugrunde liegende Bewegung (1.1) wird unter Einführung des neuen Parameters $v=m\varphi$ zur Schiebung längs der z-Achse, die wir lotrecht annehmen wollen. Die zugehörigen zyklischen Komplexe (1.5) sind durch $\omega=$ const gekennzeichnet, wie aus (1.4) hervorgeht, wenn man vor dem Grenzübergang die Konstante c durch mc ersetzt. Ein solcher Komplex \mathfrak{C}_{∞} wird durch

(5.1)
$$\mathbb{C}_{\infty} \dots p_1^2 + p_2^2 = a_2^2 p_3^2 \quad \text{mit} \quad a = \lg \omega$$

dargestellt und besteht aus allen Geraden derselben Neigung $\frac{\pi}{2} - \omega$ gegen die

Horizontale ("Böschungskomplex"). Als Sekantenkomplex eines gewissen Fernkreises kommt ihm die Charakteristik [(222)] zu (Typ 45). Die Komplexkegel von \mathfrak{C}_{∞} sind kongruente Drehkegel mit lotrechter Achse, die Komplexkegelschnitte sind hingegen durchwegs zerfallen in Paare von Parallelstrahlbüscheln.

⁴) Es sind dies jene Geodätischen der Schraubfläche, die bei Verbiegung der Schraubfläche zu einer Drehfläche in deren Meridiane übergehen.

Satz 3 besagt in der Grenze, daß alle Reflexionspolygone einer vertikalen $Zylinderfläche\ \Phi\ B\"{o}schungspolygone\ sind}$, während Satz 4 die bekannte Tatsache liefert, daß die geodätischen Linien von $\Phi\ B\"{o}schungslinien\ sind}^5$).

II. Elliptischer Fall

§6. Die angestellten Überlegungen lassen sich zwanglos auf nichteuklidische Räume übertragen. Im projektiven dreidimensionalen Raum, bezogen auf homogene projektive Koordinaten x_i (i=0, 1, 2, 3), sei zunächst eine auf die nullteilige Maßquadrik

(6.1)
$$\Omega \dots a^2 x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

gegründete elliptische Metrik nach Cayley-Kleinschem Muster eingeführt. Zur Abkürzung der Schreibweise fassen wir die Koordinaten x_i eines Punktes X zu einem Vektor $\mathfrak{x}(x_0, x_1, x_2, x_3)$ zusammen und erklären das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{x}(x_i)$, $\mathfrak{y}(y_i)$ durch

(6.2)
$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = a^2 x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Die "absolute" Maßfläche Ω schreibt sich dann kurz

$$\Omega \dots x^2 = 0$$

und die elliptische Entfernung s = dist(XY) zweier Punkte X(x), Y(y) berechnet sich aus

(6.4)
$$\cos \frac{s}{a} = \frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2}\sqrt{\mathfrak{y}^2}}.$$

Der Winkel σ zweier Ebenen kann durch die Entfernung $a\sigma$ ihrer absoluten Pole gemessen werden.

Als kongruente Transformation des elliptischen Raumes gilt in dem verwendeten projektiven Modell jede automorphe Kollineation von Ω ; sie ist gleichsinnig, wenn jede der beiden Erzeugendenscharen von Ω in sich übergeht. Eine solche "Bewegung" des elliptischen Raums vertauscht die Erzeugenden jeder Schar von Ω in projektiver Weise und läßt daher im allgemeinen in jeder Schar zwei Erzeugende fest, und mit ihnen auch die beiden Diagonalen z, \bar{z} dieses invarianten Vierseits; z und \bar{z} sind polar bezüglich Ω . Bleibt eine dieser beiden Achsen punktweise fest (die andere tut es dann ebenenweise), so spricht man von einer Drehung. Die allgemeine Bewegung läßt sich danach aus zwei Drehungen um absolut polare Achsen zusammensetzen. Als Schraubung wird — wie im euklidischen Raum — die allgemeine eingliedrige Bewegungsgruppe be-

⁵) Auf ähnliche Weise gelangt man ausgehend von der zentrischen Streckung $\mathfrak{X}'=v\mathfrak{X}$ über die zugehörigen Tangentenkomplexe der Kugeln mit dem Ursprung als Mitte – quadratische Komplexe $a^2(p_1^2+p_2^2+p_3^2)=p_4^2+p_5^2+p_6^2$ mit der Charakteristik [(111) (111)], deren Komplexkegel ebenfalls Drehkegel und deren Komplexkegelschnitte Kreise sind – zur Feststellung, daß bei einer Kegelfläche sämtliche Seiten eines Reflexionspolygons und sämtliche Tangenten einer geodätischen Linie von der Kegelspitze gleichen Abstand haben, also eine konzentrische Kugel berühren. Letzteres ist der Inhalt eines Satzes von A. Enneper [2].

zeichnet. Sie kann nach dem Gesagten in proportionale Drehungen um zwei bezüglich Ω polare Achsen z, \bar{z} zerlegt werden; der Proportionalitätsfaktor μ sei der "Modul" der Schraubung genannt.

Es bedeutet keine Einschränkung, sondern nur eine zweckmäßige Koordinatenwahl, wenn die Schraubachsen z, \bar{z} mit

$$(6.5) z \dots x_1 = x_2 = 0, \bar{z} \dots x_0 = x_3 = 0$$

angenommen werden. Wie bei früherer Gelegenheit [10] kann die elliptische Schraubung dann dargestellt werden durch

(6.6)
$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \cos \mu \varphi - \frac{x_3}{a} \sin \mu \varphi, \\ x'_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x'_3 = a x_0 \sin \mu \varphi + x_3 \cos \mu \varphi. \end{cases}$$

Die Drehung um die Achse z um den Winkel φ wird begleitet von einer Verschiebung der Achsenpunkte um die Strecke $a\mu\varphi$; der Proportionalitätsfaktor $m=a\mu$ entspricht also der "reduzierten Ganghöhe" m bei der euklidischen Schraubung (1.1). Mit m=0 ($\mu=0$) wird wieder die Drehung um z eingeschlossen.

Jedem Raumpunkt X(x) wird vermöge der Schraubung (6.6) eine Bahntangente t zugewiesen, die jenen Punkt T(t) enthält, der sich durch Ableitung von (6.6) an der Stelle $\varphi=0$ ergibt:

(6.7)
$$T...t\left(-\frac{\mu}{a}x_3, -x_2, x_1, \mu a x_0\right).$$

Wegen $x'^2 = x^2 = \text{const gilt}$

$$\mathfrak{x}\mathfrak{t}=0,$$

was geometrisch bedeutet, daß X und T konjugiert sind bezüglich Ω ; es ist also dist $(XT) = a\pi/2$.

§7. Wir werfen nun wieder die Frage auf: Ist es möglich, in jedem Raumpunkt X einen $Drehkegel \Gamma$ mit der Bahntangente t=XT als Achse und einem geeigneten Öffnungswinkel 2ω anzubringen, so daß die Erzeugenden aller ∞^3 Kegel nur einen Strahlkomplex erfüllen?

Ein von $X(\mathfrak{x})$ ausstrahlender Drehkegel Γ wird im vorliegenden projektiven Modell des elliptischen Raumes durch einen Kegel 2. Grades repräsentiert, der den aus X an die absolute Quadrik legbaren "isotropen" Tangentialkegel Ξ längs zweier Erzeugenden berührt. Dieser Kegel Ξ ist in jenem Flächenbüschel enthalten, welches von Ω und der doppelt zählenden absoluten Polarebene ξ von X aufgespannt wird. Er kann daher — in laufenden Koordinaten y_i — angesetzt werden mit $\lambda y^2 = (\mathfrak{x} y)^2$. Wegen $X \in \Xi$ muß diese Gleichung durch y = x befriedigt werden, so daß $\lambda = x^2$:

(7.1)
$$\Xi \dots \mathfrak{x}^2 \mathfrak{y}^2 - (\mathfrak{x} \mathfrak{y})^2 = 0.$$

Für einen Drehkegel Γ , der die vorgeschriebene Achse t=XT hat, müssen die beiden Berührungserzeugenden mit Ξ in der zu t normalen Ebene τ durch X liegen. Dies ist wegen (6.8) gerade die absolute Polarebene von T. Der Kegel Γ ist also in dem von Ξ und der Doppelebene τ bestimmten Kegelbüschel enthalten, mithin darstellbar durch

(7.2)
$$\Gamma \dots c^2 \left[x^2 \eta^2 - (x \eta)^2 \right] = a^2 (t \eta)^2.$$

Schreibt man diese Gleichung unter Berücksichtigung von (6.7) in Koordinaten aus, so treten nur die Ausdrücke $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ auf, d.h. die Plücker-Koordinaten der Kegelerzeugenden. Treffen wir nun die Festsetzung c = const, so genügen die Erzeugenden aller ∞^3 durch (7.2) definierten Drehkegel Γ einer gemeinsamen (homogenen) Relation in den p_{ik} und gehören daher einem gewissen Strahlkomplex $\mathfrak C$ an. Dessen Gleichung lautet, wenn man wie üblich $p_{01} = p_1$, $p_{02} = p_2$, $p_{03} = p_3$, $p_{23} = p_4$, $p_{31} = p_5$, $p_{12} = p_6$ setzt:

(7.3)
$$\mathfrak{C} \dots c^2 \left[(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{a^2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \right] = (m \, p_3 + p_6)^2.$$

Seiner Entstehung nach ist der Komplex $\mathfrak C$ invariant gegenüber allen Schraubungen um das Achsenpaar $z, \bar z$. Dies ist anhand von (7.2) leicht zu bestätigen, da aus der Invarianz von $\mathfrak X^2$, $\mathfrak Y^2$ und $\mathfrak Y^2$ gegenüber Transformationen vom Typ (6.6) über (6.4) auch die Invarianz von $\mathfrak X \mathfrak Y$ und $\mathfrak Y \mathfrak Y$ folgt. Der Öffnungswinkel 2ω des Drehkegels Γ wird demnach nur vom Achsenabstand r seines Scheitels X abhängen. Um diese Abhängigkeit zu ermitteln, berechnen wir zunächst die Entfernung $r = \operatorname{dist}(XZ)$ des Punktes $X(x_0, x_1, x_2, x_3)$ von dem in der achsennormalen Ebene $X\bar z$ gelegenen Achsenpunkt $Z(x_0, 0, 0, x_3)$. Anwendung der Distanzformel (6.4) ergibt:

(7.4)
$$\cos^2 \frac{r}{a} = \frac{(x \, \mathfrak{z})^2}{x^2 \cdot \mathfrak{z}^2} = \frac{\mathfrak{z}^2}{x^2}, \quad \sin^2 \frac{r}{a} = \frac{x^2 - \mathfrak{z}^2}{x^2}.$$

Bezeichnet ferner η den Koordinatenvektor eines Punktes $Y \in \Gamma$ in der absoluten Polarebene ξ von X, so gilt $\mathfrak{x} \eta = 0$ und zufolge (7.2) und (6.7):

(7.5)
$$(t \,\mathfrak{y})^2 = \frac{c^2}{a^2} \,\mathfrak{x}^2 \,\mathfrak{y}^2 \,, \quad t^2 = \mu^2 \,\mathfrak{z}^2 + (\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}^2) \,.$$

Nunmehr läßt sich $\omega = \angle TXY$ über dist $(TY) = a\omega$ berechnen aus

(7.6)
$$\cos^2 \omega = \frac{(t\,\mathfrak{y})^2}{\mathsf{t}^2\,\mathfrak{y}^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\mathfrak{x}^2}{\mathsf{t}^2} = \frac{c^2\,\mathfrak{x}^2}{m^2\,\mathfrak{z}^2 + a^2(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}^2)} \,.$$

Vergleich mit (7.4) liefert schließlich die gesuchte Beziehung:

(7.7)
$$\sqrt{m^2 \cos^2 \frac{r}{a} + a^2 \sin^2 \frac{r}{a}} \cdot \cos \omega = c = \text{const.}$$

Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage lautet mithin in Analogie zu Satz 1:

Satz 6. Bringt man in jedem Punkt des elliptischen Raumes einen Drehkegel Γ an, dessen Achse die Bahntangente des Punktes für eine Schraubung um die Achse z mit der reduzierten Ganghöhe $m=\mu a$ ist (m=0 im Grenzfall der Drehung), und legt man den Öffnungswinkel 2ω von Γ in Abhängigkeit vom Achsenabstand Γ der Spitze durch (7.7) fest, so erfüllen die Erzeugenden aller ∞ Kegel bloß einen Strahlkomplex (7.3).

Der Grenzübergang $a \to \infty$ führt die elliptische Metrik in die euklidische über, wenn die x_i homogene kartesische Koordinaten bedeuten. Die Formeln (7.7) und (7.3) gehen dabei unmittelbar in die entsprechenden Formeln (1.4) und (1.5) über.

§8. Im Sonderfall c=0 ist $\omega=\pi/2$, die Drehkegel Γ platten sich zu den Bahnnormalebenen der Bewegung (6.6) ab und der Komplex $\mathfrak C$ reduziert sich auf das doppelt zählende Normalengewinde

(8.1)
$$\mathfrak{C}_0 \dots m p_3 + p_6 = 0,$$

dessen Existenz bei nichteuklidischen Schraubungen schon K. STRUBECKER [7,8] nachgewiesen hat. Im Falle der Drehung (m=0) artet es zum Strahlgebüsch $p_6=0$ aus.

Im allgemeinen Fall $c \neq 0$ handelt es sich wie im euklidischen Raum um einen metrisch speziellen quadratischen Strahlkomplex $\mathfrak C$, der wieder ein "zyklischer" genannt werden kann. Seine Komplexkegel Γ sind nämlich durchwegs Drehkegel und seine Komplexkegelschnitte k durchwegs Kreise, jetzt natürlich im Sinne der elliptischen Metrik. Der Nachweis der Komplexkreise ist wie in §1 zu führen, indem man mittels Symmetriebetrachtungen zeigt, daß alle einer Ebene α angehörenden Komplexstrahlen von deren Nullpunkt Λ (bezüglich $\mathfrak C_0$) gleichen Abstand haben.

Der Komplexkegel Γ zerfällt, wenn $\omega=0$ ist, und zwar in zwei isotrope Ebenen (Tangentialebenen von Ω). Dies tritt gemäß (7.6) für jene Punkte X_0 ein, die der *Quadrik*

(8.2)
$$\Delta \dots (c^2 - m^2)(a^2 x_0^2 + x_3^2) + (c^2 - a^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

angehören. Diese (nicht unbedingt reelle) Drehfläche Δ ist als Cliffordsche Abstandsfläche der Achse z in jenem Abstand r=b anzusehen, der sich gemäß (7.7) aus

(8.3)
$$tg^2 \frac{b}{a} = \frac{c^2 - m^2}{a^2 - c^2}$$

berechnet.

Als Ort singulärer Punkte ist Δ ein Bestandteil der Singularitätenfläche des zyklischen Strahlkomplexes $\mathfrak C$, ebenso auch die absolute Quadrik Ω als Hüllgebilde singulärer Ebenen. Die Kummersche Singularitätenfläche 4. Ordnung und 4. Klasse ist demnach in die beiden Quadriken Δ und Ω zerfallen, die das Erzeugendenvierseit mit den Diagonalen z, \overline{z} gemeinsam haben. In Übereinstimmung mit der Theorie der quadrischen Komplexe werden die Flächen Δ und Ω von allen Komplexkegeln Γ und allen Komplexkegelschnitten k je

doppelt berührt. Für Ω ist dies in der Tatsache begründet, daß die Γ Drehkegel und die k Kreise sind; für Δ läßt sich der Nachweis nach dem Vorbild in §2 leicht erbringen.

Satz 7. Sämtliche Komplexkegel des zyklischen Strahlkomplexes \mathfrak{C} (7.3) sind Drehkegel, welche die Cliffordsche Fläche Δ (8.2) doppelt berühren. Alle Komplexkegelschnitte von \mathfrak{C} sind Kreise, welche die Quadrik Δ gleichfalls doppelt berühren.

Die dem zyklischen Komplex \mathfrak{C} ($ac \neq 0$) zukommende Charakteristik hat im allgemeinen, d.h. wenn $c^2 \neq m^2$, $c^2 \neq a^2$ und $a^2 \neq m^2$, die Form [(11)(11) 11]. In den Sonderfällen $c^2 = m^2 + a^2$ oder $c^2 = a^2 + m^2$ lautet die Charakteristik [(11)(11) 2]; hier artet die Clifford-Quadrik △ (8.2) in das isotrope Ebenenpaar durch die Achse z bzw. durch die Achse \bar{z} aus und die Komplexkreise k sind Loxodromen des Ebenenbüschels z bzw. \bar{z} [11], während alle Komplexkegel Γ die Fixpunkte $(1, 0, 0, \pm ia)$ der Achse z bzw. die Fixpunkte $(0, 1, \pm i, 0)$ der Achse \bar{z} enthalten. Dem Spezialfall $m^2 = a^2 + c^2$ kommt eine besondere Bedeutung zu: Hier ist die Bewegung (6.6) wegen $\mu = \pm 1$ eine Cliffordsche Schiebung, deren Bahnen durchwegs gerade Linien sind und ein Strahlnetz erfüllen. Gemäß (7.7) ist $\omega = \text{const}$ (vgl. §5), so daß alle Komplexkegel Γ untereinander kongruent sind; gleiches gilt für die Komplexkreise. Die beiden Bestandteile der Singularitätenfläche vereinigen sich in der absoluten Quadrik $\Omega = \Delta$ und die Charakteristik nimmt die Form [(111)(11) 1] an. – Die zyklischen Komplexe des elliptischen Raumes gehören mithin zum Typ 29, 30 oder 46 der quadratischen Strahlkomplexe [12]⁶).

§9. Auf Grund der gleichen Überlegungen wie im euklidischen Raum gilt zunächst die Aussage von Satz 3 wörtlich auch im elliptischen Raum: Jedes *Reflexionspolygon* einer elliptischen Dreh- oder Schraubfläche gehört mit seinen Seiten einem zyklischen Komplex $\mathfrak C$ oder im besonderen dem Bahnnormalengewinde $\mathfrak C_0$ an.

In der Grenze und mit der gleichen Begründung wie in §4 besteht auch das elliptische Seitenstück zum Satz 4:

Satz 8. Jede auf einer Dreh- oder Schraubfläche des elliptischen Raumes gezogene geodätische Linie ist Komplexkurve eines zyklischen Strahlkomplexes $\mathfrak C$ oder im besonderen des Normalengewindes $\mathfrak C_0$.

Damit hat man in Verallgemeinerung des Satzes von Clairaut-Sauer den

Satz 9. Längs jeder geodätischen Linie einer elliptischen Schraubfläche mit der Ganghöhe $2\pi m$ besteht zwischen dem Achsenabstand r und dem gegen die Bahnschraublinien gemessenen Kurswinkel ω die Beziehung (7.7). Im Falle einer Drehfläche reduziert sich die Beziehung auf $\sin(r/a)\cos\omega=\cosh$, im Falle eines Cliffordschen Zylinders $(m=\pm a)$ auf $\omega=\cosh$.

⁶⁾ Der ausgeschlossene Fall $c^2 = a^2 = m^2$ kann außer Betracht bleiben. Hier sind alle $∞^2$ Bahngeraden der zugrunde liegenden Cliffordschen Schiebung (6.6) singuläre Strahlen, weil zufolge (7.7) überall ω = 0 ist. Der Komplex © zerfällt dabei in die Paare konjugiertimaginärer Strahlgebüsche $ap_1 + p_4 = \pm i(ap_2 + p_5)$ oder $ap_1 - p_4 = \pm i(ap_2 - p_5)$.

Daß auf einem Cliffordschen Zylinder die Isogonaltrajektorien der Erzeugendenschar mit den geodätischen Linien identisch sind, hat seinen tieferen Grund in der Tatsache, daß sich eine solche Fläche isometrisch auf die euklidische Ebene abbilden läßt.

Der Grenzfall $m=\infty$ liefert im Gegensatz zum euklidischen Raum (§5) nichts Neues, da sich wieder *Drehflächen* einstellen, und zwar mit der Achse \bar{z} .

III. Hyperbolischer Fall

§ 10. Die Übertragung der Entwicklungen des II. Abschnitts auf den hyperbolischen Raum, dessen Metrik sich auf die reelle Maßquadrik

(10.1)
$$\Omega \dots -a^2 x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

stützt, ist ohne weiteres möglich und läuft im Grunde nur auf den Vorzeichenwechsel bei a^2 hinaus.

Die hyperbolische Schraubung kann demnach analog zu (6.6) wie in [10] mittels Hyperbelfunktionen beschrieben werden durch:

(10.2)
$$\begin{cases} x'_0 = x_0 \cosh \mu \varphi + \frac{x_3}{a} \sinh \mu \varphi, \\ x'_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ x'_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x'_3 = a x_0 \sinh \mu \varphi + x_3 \cosh \mu \varphi. \end{cases}$$

Die reduzierte Ganghöhe der Schraubung hat den Wert $m=a\mu$; die Annahme m=0 kennzeichnet die Drehung um die eigentliche Achse $z(x_1=x_2=0)$, der Grenzfall $m=\infty$ führt auf die "Schiebung" längs z.

Die zugehörigen zyklischen Strahlkomplexe werden entsprechend (7.3) dargestellt durch:

(10.3)
$$\mathbb{C} \dots c^2 \left[(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{1}{a^2} (p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) \right] = (m p_3 + p_6)^2.$$

Als Grenzform für c=0 enthalten sie wieder das doppelt zählende Normalengewinde \mathfrak{C}_0 (8.1). Diese Komplexe sind — abgesehen von den geänderten Realitätsverhältnissen — vom gleichen Typ wie in §8: ihre Komplexkegel sind durchwegs Drehkegel und ihre Komplexkegelschnitte durchwegs Kreise — jetzt natürlich im Sinne der hyperbolischen Geometrie. Die Singularitätenfläche zerfällt wieder in die absolute Quadrik Ω und eine (nicht unbedingt reelle) Drehquadrik

(10.4)
$$\Delta \dots (c^2 - m^2) (-a^2 x_0^2 + x_3^2) + (c^2 + a^2) (x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

welche als Abstandsfläche der Achse z in jener Entfernung r=b anzusehen ist, die sich aus

(10.5)
$$th^2 \frac{b}{a} = \frac{c^2 - m^2}{c^2 + a^2}$$

bestimmt.

Zwischen dem Öffnungswinkel 2ω eines Komplexkegels und dem Achsenabstand r seiner Spitze besteht als Gegenstück zu (7.7) die Relation

(10.6)
$$\sqrt{m^2 \cosh^2 \frac{r}{a} + a^2 \sinh^2 \frac{r}{a}} \cdot \cos \omega = c = \text{const.}$$

Dieser Ausdruck bleibt längs jedes Reflexionspolygons einer hyperbolischen Schraubfläche mit der Ganghöhe $2\pi m$ konstant und ebenso längs jeder geodätischen Linie dieser Fläche, wobei ω wieder als Kurswinkel gegen die Bahnkurven zu deuten ist. Die Beziehung (10.6) stellt mithin das hyperbolische Analogon der Formel von CLAIRAUT-SAUER dar. Sie reduziert sich bei Drehflächen (m=0) auf $\operatorname{sh}(r/a) \cos \omega = \operatorname{const}$, bei Schiebflächen $(m=\infty)$ auf $\operatorname{ch}(r/a) \cdot \cos \omega = \operatorname{const}$.

Literatur

- [1] Clairaut, A.: Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne. Mém. Acad. Sci. Paris 1733, 406-416.
- [2] LORIA, G.: Curve sghembe speciali. Vol. II, p. 217. Bologna: Zanichelli 1925.
- [3] MÜLLER, E.: Schraubflächen und Strahlgewinde. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 125, 921-965 (1916).
- [4] Kreise als Loxodromen. Archiv Math. Phys. 26, 73-96 (1918).
- [5] SAUER, R.: Streifenmodelle und Stangenmodelle zur Differentialgeometrie der Drehflächen, Schraubenflächen und Regelflächen. Math. Z. 48, 455-466 (1942).
- [6] Segre, C.: Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes. J. reine angew. Math. 97, 95-110 (1884).
- [7] STRUBECKER, K.: Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 139, 421-450 (1930).
- [8] Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. Phys. 38, 63-84 (1931).
- [9] STUDY, E.: Über Nicht-Euklidische und Linien-Geometrie. J.-ber. deutsch. Math.-Verein. 11, 313-340 (1902), insb. 317.
- [10] WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Monatsh. Math. Phys. 44, 249-279 (1936).
- [11] Kreise als Doppelloxodromen. Archiv Math. 6, 230-242 (1955).
- [12] ZINDLER, K.: Algebraische Liniengeometrie. Enzykl. Math. Wiss. III C 8, insb. 1099ff. u. 1126ff.

Wien IV, Österreich, Technische Hochschule, Karlsplatz 13

(Eingegangen am 27. Mai 1964)