[redacted]

Nicht im Handel!

Sonderabdruck aus 68. Band, 1964, 5. Heft der

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

Herausgegeben von E. Hlawka und N. Hofreiter

Springer-Verlag in Wien Alle Rechte vorbehalten

Zur Geometrie eingliedriger Kollineationsgruppen mit imaginärem Fixpunkttetraeder

Karl Strubecker zum 60. Geburtstag

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. Januar 1964)

Zur Geometrie eingliedriger Kollineationsgruppen mit imaginärem Fixpunkttetraeder

Karl Strubecker zum 60. Geburtstag

Von

Walter Wunderlich, Wien

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. Januar 1964)

1. Einleitung

Die Bahnkurven eingliedriger Kollineationsgruppen, von *F. Klein* und *S. Lie* „*W-Kurven*" genannt [3, 5], haben wegen ihrer merkwürdigen Eigenschaften immer wieder das Interesse der Geometer erweckt. Bei Beschränkung auf den Hauptfall eines nichtausgearteten Fixpunktsimplex der erzeugenden Kollineationsgruppe, das dann auch als Koordinatensimplex verwendet werden kann, läßt sich im n-dimensionalen projektiven Raum R_n ($n \geqq 2$) die Gruppe anschreiben mit

$$x_i' = t^{\alpha_i} x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1;\ \alpha_i \neq \alpha_j \text{ für } i \neq j). \tag{1.1}$$

Dementsprechend hat man vom *komplexen Standpunkt* aus im wesentlichen einen einzigen Haupttyp von W-Kurven des R_n; ihre Parameterdarstellung ist gleichfalls durch (1.1) gegeben, wobei $x_i = \text{const}$ zu setzen ist. Da die Projektionen einer solchen W-Kurve aus den Fixpunkten auf die gegenüberliegenden Hyperebenen des Simplex wieder W-Kurven sind, lassen sich auf diese Weise die W-Kurven des R_n auf jene des R_{n-1} zurückführen.

Vom *reellen Standpunkt* aus sind jedoch, den möglichen Realitätsverhältnissen des Fundamentalsimplex entsprechend, mehrere Typen reeller W-Kurven zu unterscheiden, und zwar $m = [(n+3)/2]$. So gibt es in der Ebene R_2 $m = 2$ Typen reeller W-Kurven mit nichtausgeartetem Fundamentaldreieck; sie sind bekanntlich projektiv äquivalent den allgemeinen Parabeln bzw. den logarithmischen Spiralen, den Grenzfall

des Kreises eingeschlossen [5]. Im dreidimensionalen Raum R_3 hat man $m = 3$ Typen, je nachdem ob vier reelle Fixpunkte, zwei reelle und zwei konjugiert-imaginäre oder schließlich zwei Paare konjugiert-imaginärer Fixpunkte vorliegen.

Im letzten Fall ist die erwähnte Zurückführung auf zweidimensionale W-Kurven mittels Projektion aus Fixpunkten reell nicht durchführbar, und dies ist wohl der Grund, warum man diesem Fall — mit einer Ausnahme — bisher anscheinend aus dem Wege gegangen ist. Die anzuführende Ausnahme betrifft die von *K. Strubecker* [6] ausführlich behandelte „Schraubung des elliptischen Raumes" im *Cayley-Klein*schen projektiven Modell, deren Bahnen W-Kurven des dritten Typs sind. Dieselben sind allerdings auch in projektiver Hinsicht ausgezeichnet, da sie auf Quadriken verlaufen, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Die bestehende Lücke auszufüllen, also eine konstruktive (darstellendgeometrische) Behandlung der allgemeinen W-Kurven des dritten Typs und der sie erzeugenden Kollineationsgruppen mit imaginärem Fixpunkttetraeder zu entwickeln, soll die Aufgabe der vorliegenden Note sein. Im Zusammenhang damit wird sich auch eine neue Deutung jener bemerkenswerten Verallgemeinerung der Radlinien ergeben, die der Verfasser studiert und als „Spiraloiden" bezeichnet hat [11, 12].

2. Analytischer Ansatz

Wird der dreidimensionale projektive Raum R_3 auf homogene projektive Punktkoordinaten x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezogen, so kann man es bei Verwendung eines reellen Koordinatentetraeders immer so einrichten, daß die konjugiert-imaginären Fixpunktpaare der zu betrachtenden Kollineationsgruppen durch

$$I(1 : i : 0 : 0),\ \bar{I}(1 : -i : 0 : 0),\ J(0 : 0 : i : 1),\ \bar{J}(0 : 0 : -i : 1) \qquad (2.1)$$

dargestellt werden. Eine Kollineation mit diesen Fixpunkten wird dann, wie man leicht nachprüft, durch

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha x_1 - \beta x_2, \\ x_2' &= \beta x_1 + \alpha x_2, \\ x_3' &= \gamma x_3 + \delta x_4, \\ x_4' &= -\delta x_3 + \gamma x_4, \end{aligned} \qquad (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \neq 0 \qquad (2.2)$$

beschrieben. Die ∞^3 Kollineation dieser Art bilden eine *kommutative dreigliedrige Gruppe* $\mathfrak{G}$, die jeden Punkt allgemeiner Lage an jede gewünschte Stelle allgemeiner Lage zu bringen gestattet, also transitiv

ist. Hierauf beruht die projektive Äquivalenz aller ∞^2 Bahnkurven jeder eingliedrigen Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Eine infinitesimale, also zur Identität $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$ benachbarte Transformation aus $\mathfrak{G}$ kann durch $\alpha = 1 + p\,d\tau$, $\beta = q\,d\tau$, $\gamma = 1$, $\delta = d\tau$ mit festem p und q angesetzt werden und führt auf das folgende Differentialgleichungssystem für die in $\mathfrak{G}$ enthaltenen *eingliedrigen Untergruppen* $G_{p,q}$:

$$\begin{aligned} dx_1 &= (px_1 - qx_2)\,d\tau, \\ dx_2 &= (qx_1 + px_2)\,d\tau, \\ dx_3 &= \quad x_4\,d\tau, \\ dx_4 &= -\,x_3\,d\tau. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nach Integration dieses linearen Systems hat man für die zur Untersuchung stehenden Kollineationsgruppen und ihre Bahnen in an (2.2) wieder angepaßter Schreibweise die *reelle Darstellung*:

$$\begin{aligned} x_1' &= e^{p\tau}(x_1 \cos q\tau - x_2 \sin q\tau), \\ x_2' &= e^{p\tau}(x_1 \sin q\tau + x_2 \cos q\tau), \\ x_3' &= \quad x_3 \cos\tau + x_4 \sin\tau, \\ x_4' &= -x_3 \sin\tau + x_4 \cos\tau. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Diese Darstellung ist natürlich äquivalent der wohl einfacheren, jedoch komplexen Darstellung (1.1), in welcher etwa $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = p + iq : p - iq : i : -i$ anzunehmen wäre.

Für $p = 0$ liegen die von *K. Strubecker* betrachteten *Schraubungen des elliptischen Raumes* vor, dessen Metrik sich auf die absolute Quadrik $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ gründet, welche ja gegenüber $G_{0,q}$ invariant ist. Die reellen Gegenkanten $I\bar{I}(x_3 = x_4 = 0)$ und $J\bar{J}(x_1 = x_2 = 0)$ des Fixtetraeders geben das (absolut-polare) Achsenpaar einer solchen Schraubung ab, und q bedeutet den in [6] eingeführten „Schraubparameter". Die die Rolle von Schraublinien spielenden Bahnkurven von $G_{0,q}$ verlaufen auf den *invarianten Quadriken*

$$x_1^2 + x_2^2 = \varrho(x_3^2 + x_4^2), \tag{2.5a}$$

die als *Cliffords*che Abstandsflächen des Schraubachsenpaares anzusehen sind.

Es gibt im übrigen noch zwei als *nichteuklidische Schraubungen* deutbare Sonderfälle, nämlich die Annahmen $q = 1$ und $q = -1$. Auch hier existiert je ein Büschel invarianter Quadriken, und zwar

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = \varrho(x_1 x_3 - x_2 x_4) \tag{2.5b}$$

bzw.

$$x_1x_4 - x_2x_3 = \varrho(x_1x_3 + x_2x_4). \tag{2.5c}$$

Die auf eine solche (reelle) Quadrik gegründete projektive Metrik ist allerdings *indefinit* [7], und das Schraubachsenpaar ist nicht reell, sondern besteht aus den konjugiert-hochimaginären Geraden $I\bar{J}$ und $\bar{I}J$ im Falle $q = 1$, bzw. aus den Geraden IJ und $\bar{I}\bar{J}$ im Falle $q = -1$.

Die drei angeführten Spezialfälle $p = 0$ und $q = \pm 1$ sind überdies die einzigen, in welchen die Bahnkurven *Gewindekurven* sind: Sämtliche Tangenten jener ∞^1 Bahnen, die auf der durch eine bestimmte Konstante ϱ gekennzeichneten invarianten Quadrik (2.5) verlaufen, gehören einem und demselben *linearen Strahlkomplex* an, der in Plückerkoordinaten g_{ik} beziehungsweise durch

$$g_{12} + \varrho\ q\, g_{34} = 0, \tag{2.6a}$$

$$(2\varrho - p)(g_{14} + g_{23}) + (p\varrho + 2)(g_{13} - g_{24}) = 0, \tag{2.6b}$$

$$(2\varrho - p)(g_{14} - g_{23}) + (p\varrho + 2)(g_{13} + g_{24}) = 0 \tag{2.6c}$$

beschrieben wird. Die Richtigkeit dieser Formeln ist mit Benützung von (2.3) und (2.5) leicht zu bestätigen.

Im allgemeinen Fall steht keine reguläre invariante Quadrik für eine projektive Maßbestimmung zur Verfügung. Wohl könnte aber, wie dies *W. Blaschke* [1] im Rahmen der sogenannten „kinematischen Abbildung" getan hat, jenes *ausgeartete Maßgebilde* herangezogen werden, das aus zwei Paaren verschränkter konjugiert-imaginärer Strahlbüschel besteht: dem Büschelpaar $(I; I\bar{I}J)$[1], $(\bar{I}; I\bar{I}\bar{J})$ und dem Büschelpaar $(I; I\bar{I}\bar{J})$, $(\bar{I}; I\bar{I}J)$. Die auf dieses invariante Maßgebilde gegründete *„quasielliptische Geometrie"* weist eine Gruppe von ∞^7 „Quasiähnlichkeiten" (automorphen Kollineationen des Maßgebildes) auf, die eine sechsgliedrige Untergruppe von „Quasibewegungen" umfaßt [4]. In diesem Sinne wäre $G_{p,q}$ für $p = 0$ auch als „Quasischraubung" und für $p \neq 0$ als „Quasispiralung" aufzufassen.

Abschließend sei noch vermerkt, daß sämtliche ∞^3 *Bahntangenten* der Gruppe $G_{p,q}$ — wie bei jeder eingliedrigen Kollineationsgruppe — einen *quadratischen* (*tetraedralen*) *Strahlkomplex* erfüllen. Seine Gleichung lautet, wie wieder mittels (2.3) leicht nachzuprüfen ist:

$$q(g_{13}^2 + g_{14}^2 + g_{23}^2 + g_{24}^2) + (1 + p^2 + q^2)\, g_{12}\, g_{34} = 0. \tag{2.7}$$

[1] Damit ist das Strahlbüschel in der Ebene $I\bar{I}J$ mit dem Scheitel I gemeint.

3. Metrische Normalform

Mit Rücksicht auf die beabsichtigte konstruktive Behandlung der Gruppen $G_{p,q}$ und ihrer Bahnkurven sollen in der Folge die verwendeten projektiven Koordinaten x_i grundsätzlich als *homogene kartesische Koordinaten* aufgefaßt werden, die mit den inhomogenen Koordinaten x, y, z vermöge

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x : y : z : 1 \tag{3.1}$$

zusammenhängen. Die Fixpunkte $I, \bar{I}$ sind dann die absoluten Kreispunkte der xy-Ebene, während die Punkte $J, \bar{J}$ der z-Achse angehören und durch $z = \pm i$ festgelegt sind.

Die Koordinatenebene $z = 0$ ($x_3 = 0$), von nun ab als „*Mittelebene*" bezeichnet und später als Bildebene verwendet, erfährt vermöge der Kollineation (2.4) der Gruppe $G_{p,q}$ eine *Ähnlichkeitstransformation*, die sich in die folgenden drei Schritte zerlegen läßt:

a) Eine Drehung um die z-Achse um den Winkel $q\tau$;

b) eine zentrische Streckung vom Ursprung aus mit dem Faktor $e^{p\tau}/\cos\tau$;

c) eine Verschiebung längs der z-Achse um die Strecke $\operatorname{tg}\tau$.

Allgemeiner erfährt jede beliebige *zur z-Achse normale Ebene* eine derartige *Drehstreckung*, weil das ihr angehörende absolute Punktepaar $I, \bar{I}$ festbleibt. Kennzeichnet man eine solche Ebene π durch ihre „Winkelkote" $\tau_0 = \operatorname{arctg} z$, so kann man sie zunächst durch die zum Parameterwert $-\tau_0$ gehörige Kollineation in die Mittelebene π_0 bringen, und auf diese anschließend die Kollineation $\tau_0 + \tau$ anwenden; π erfährt hierdurch insgesamt

a) eine Drehung um die z-Achse um den Winkel $q\tau$;

b) eine zentrische Streckung vom Achsenpunkt aus mit dem Faktor $e^{p\tau}\cos\tau_0/\cos(\tau_0 + \tau)$;

c) eine Verschiebung längs der z-Achse um die Strecke $\operatorname{tg}(\tau_0 + \tau) - \operatorname{tg}\tau_0$.

Diese Operationen sind zeichnerisch unschwer auszuführen, womit eine brauchbare *Konstruktionsvorschrift* für die Ausübung der Kollineationen einer Gruppe $G_{0,q}$ zur Verfügung steht. Im folgenden soll jedoch ein etwas eleganteres Konzept entwickelt werden.

4. Doppelte Netzprojektion

Die Bahnen der speziellen Gruppe $G_{0,1}$, gemäß (2.4) beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\tau - x_2 \sin\tau, \\ x_2' &= x_2 \cos\tau + x_1 \sin\tau, \\ x_3' &= x_3 \cos\tau + x_4 \sin\tau, \\ x_4' &= x_4 \cos\tau - x_3 \sin\tau, \end{aligned} \tag{4.1}$$

sind ersichtlich durchwegs *gerade Linien*. Die Bahngerade r des Punktes $P(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ enthält (für $\tau = \pi/2$) den Punkt $Q(-x_2 : x_1 : x_4 : -x_3)$ und daher auch den durch Linearkombination mit den Faktoren 1 und i abgeleiteten Punkt $R(x_1 - ix_2 : x_2 + ix_1 : x_3 + ix_4 : x_4 - ix_3)$. Die ersten beiden Koordinaten von R verhalten sich wie $1 : i$, die letzten beiden wie $i : 1$; hieraus folgt mit Rücksicht auf (2.1), daß R der hochimaginären Fixgerade IJ angehört. Ebenso zeigt man, daß die Gerade r auch die konjugierte Gegenkante $\bar{I}\bar{J}$ trifft. Die ∞^2 Bahngeraden r von $G_{0,1}$ bilden demnach ein *elliptisches Strahlnetz* mit den Brennlinien IJ und $\bar{I}\bar{J}$. In der vorgenommenen Normierung handelt es sich um ein rotationssymmetrisches „*Drehnetz*", dessen reelle Strahlen gegenüber der z-Achse durchwegs *rechtsgewunden* sind, wenn das verwendete Achsenkreuz x, y, z als Rechtssystem vorausgesetzt wird. Anschaulich ist dieses Drehnetz etwa als Gesamtheit der Bahntangenten der ∞^2 Punkte der Mittelebene π_0 vorzustellen, wenn auf dieselben eine euklidische Rechtsschraubung mit der reduzierten Ganghöhe 1 ausgeübt wird.

Analog erfüllen die ∞^2 Bahngeraden l der Gruppe $G_{0,-1}$ ein *linksgewundenes Drehnetz* mit den Brennlinien $\bar{I}J$ und $I\bar{J}$. Dieses „Linksnetz" $\{l\}$ liegt zum „Rechtsnetz" $\{r\}$ bezüglich der Mittelebene π_0 symmetrisch.

Vom nichteuklidischen Standpunkt aus sind die speziellen Schraubungen $G_{0,1}$ und $G_{0,-1}$ des elliptischen (oder quasielliptischen) Raumes als *Cliffords*che *Schiebungen* anzusprechen [6]. Ihre Bahngeraden sind im Cliffordschen Sinne rechts- bzw. linksparallel zur z-Achse.

Im Hinblick auf die Invarianz der beiden Strahlnetze gegenüber der Gruppe $G_{p,q}$ liegt es nahe, sie im vorliegenden Rahmen als *Abbildungsmittel* heranzuziehen: Man lege durch einen Raumpunkt P je einen Strahl aus $\{r\}$ und $\{l\}$ und bringe diese „Projektionsstrahlen" mit der als Bildebene dienenden Mittelebene π_0 zum Schnitt; auf diese Weise werden dem Punkt P zwei Bildpunkte zugeordnet, nämlich der „*Rechtsriß*" P^r und der „*Linksriß*" P^l. Aus dem Bildpaar P^r, P^l ist der Dingpunkt P im allgemeinen eindeutig zu rekonstruieren. — Die Zweckmäßigkeit dieser von *L. Tuschel* [9] eingeführten, metrisch speziellen

Netzprojektion wurde insbesondere für die elliptische Schraubung bereits von *K. Strubecker* [8] erkannt; ihr doppelter Einsatz wurde hierbei vom Verfasser [10] ausgenützt und auch von *F. Hohenberg* [2] vorgeschlagen.

Für den Raumpunkt $P(x, y, z = \operatorname{tg}\tau_0)$ findet man den Rechtsriß $P^r(x_r, y_r, 0)$ bzw. Linksriß $P^l(x_l, y_l, 0)$ durch Anwendung der zum Parameterwert $-\tau_0$ gehörigen Kollineation aus $G_{0,1}$ bzw. $G_{0,-1}$. Faßt man zur Abkürzung der Schreibweise die (reellen) Koordinaten zu komplexen Größen zusammen, so ergibt sich mittels (4.1):

$$x_r + iy_r = (x + iy) \,.\, e^{-i\tau_0} \cos\tau_0,\; x_l + iy_l = (x+iy) \,.\, e^{i\tau_0} \cos\tau_0. \quad (4.2)$$

Die beiden Netzrisse eines Punktes haben denselben Ursprungsabstand, sind also stets an einen im Ursprung zentrierten *Ordnerkreis* gebunden.

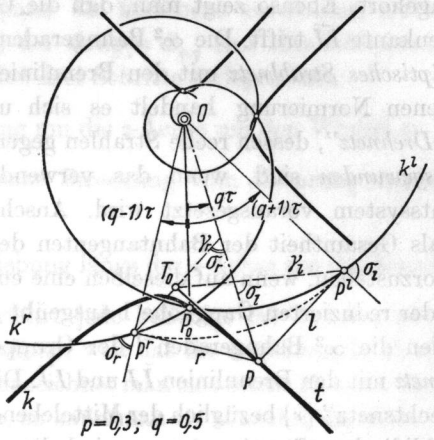

Abb. 1. Netzrisse und Grundriß einer Bahnkurve k der Gruppe $G_{p,q}$.

Die durch eine Kollineation (2.4) der Gruppe $G_{p,q}$ bewirkte Verlagerung des Punktes P nach P' zieht nun im rechten und linken Bildfeld gewisse *Drehstreckungen* nach sich, die durch

$$x_r' + iy_r' = (x_r + iy_r) \,.\, e^{(p+iq-i)\tau},\; x_l' + iy_l' = (x_l + iy_l) \,.\, e^{(p+iq+i)\tau} \quad (4.3)$$

beschrieben werden. Man hat damit die grundlegende Tatsache:

Satz 1. *Die eingliedrige Kollineationsgruppe $G_{p,q}$ bildet sich in ihrer metrischen Normalform vermöge der doppelten Netzprojektion auf zwei eingliedrige Ähnlichkeitsgruppen der Bildebene π_0 ab, die den Ursprung festlassen.*

Genauer gesagt: Die zum Parameterwert τ gehörige Kollineation aus $G_{p,q}$ bewirkt im rechten und linken Bildfeld je eine Drehstreckung um den Ursprung mit dem Drehwinkel $(q-1)\tau$ bzw. $(q+1)\tau$ und dem gemeinsamen Streckfaktor $e^{p\tau}$.

Für die Abbildung einer *Bahnkurve* k der Gruppe $G_{p,q}$ ergibt sich damit die Aussage:

Satz 2. *Jede Bahnkurve k der Gruppe $G_{p,q}$ bildet sich im Rechtsriß auf eine logarithmische Spirale k^r mit dem Kurswinkel $\sigma_r = \operatorname{arcctg} p/(q-1)$ ab, im Linksriß auf eine logarithmische Spirale k^l mit dem Kurswinkel $\sigma_l = \operatorname{arcctg} p/(q+1)$; beide Spiralen haben ihr Zentrum im Ursprung.*

Abb. 1 zeigt die Konstruktion des Grundrisses einer Bahnkurve aus ihren Netzrissen. Die darin ersichtliche Ermittlung der Tangente wird im nächsten Abschnitt erklärt.

5. Invariante Netzflächen

Die von einem Strahl r des Rechtsnetzes $\{r\}$ unter Einwirkung der Gruppe $G_{p,q}$ überstrichene *Strahlfläche* Γ_r ist natürlich gegenüber der Gruppe invariant und ganz in dem invarianten Netz $\{r\}$ enthalten. Da ihre Erzeugenden im Sinne der quasielliptischen Geometrie rechtsparallel sind, kann Γ_r als *Cliffordscher Rechtszylinder* bezeichnet werden. Ein solcher Rechtszylinder Γ_r trägt ∞^1 Bahnkurven der Gruppe $G_{p,q}$, nämlich die Bahnen der Punkte von r; ihr gemeinsamer Rechtsriß k^r, nach Satz 2 eine *logarithmische Spirale*, kennzeichnet als *Basiskurve* in der Mittelebene π_0 ausreichend die charakteristische Wickelform der Fläche (Abb. 2). Die ∞^1 Rechtszylinder Γ_r, auf welche sich die ∞^2 Bahnen der Gruppe $G_{p,q}$ zu je ∞^1 verteilen, haben kongruente Basisspiralen, sind also untereinander *euklidisch kongruent*.

Der Rechtszylinder Γ_r entsteht auch durch Ausübung der Rechtsschiebung $G_{0,1}$ auf die Basisspirale k^r, wobei sie sich nur ähnlich verändert und die Schar der *Schichtenlinien* $z = \text{const}$ durchläuft. Aus der Tatsache, daß die Schichtenlinien untereinander kongruente logarithmische Spiralen sind, folgt die Möglichkeit, die Fläche Γ_r auch als *euklidische Bewegfläche* zu erzeugen, nämlich durch eine schraubenartige Bewegung einer Schichtenspirale um die z-Achse.

Die gleichen logarithmischen Basisspiralen, gekennzeichnet durch den Kurswinkel σ_r, treten bei allen jenen Gruppen $G_{p,q}$ auf, für welche gemäß Satz 2 der Ausdruck $p/(q-1)$ denselben Wert $c = \operatorname{ctg} \sigma_r$ hat.

Satz 3. *Jeder Cliffordsche Rechtszylinder Γ_r gestattet eine zweigliedrige Kollineationsgruppe, bestehend aus den ∞^1 eingliedrigen Kollineationsgruppen $G_{p,q}$, für welche $p = c(q-1)$.*

Als *Parameterdarstellung* eines solchen Rechtszylinders Γ_r erhält man mit Benützung von (4.1) und (4.3):

$$x + iy = \frac{a}{\cos\tau}\, e^{c\varphi}\, e^{i(\varphi+\tau)} \text{ mit } c = \frac{p}{q-1}, \qquad z = \operatorname{tg}\tau. \tag{5.1}$$

Unter den ∞^1 *Scharen von W-Kurven*, die ein solcher Rechtszylinder trägt, sind folgende hervorzuheben:

a) Die *geradlinigen Erzeugenden* für $p = 0$, $q = 1$.

b) Die *logarithmischen Schichtenspiralen* für den Grenzfall $p = q = \infty$ mit $p/q = c$. Längs der Schichtenlinie $z = \text{const}$ läßt sich der Fläche ein *Berührungskegel* umschreiben, dessen invariante Spitze auf der z-Achse in der Höhe $Z = (1 + cz)/(c - z)$ liegt.

c) Die *Meridiankurven* für $p = -c$, $q = 0$. Längs dieser von den Ebenen durch die z-Achse ausgeschnittenen Kurven lassen sich der Fläche *Berührungszylinder* anschreiben, deren Erzeugenden zur xy-Ebene parallel sind. Die Meridiane bilden daher mit den Schichtenlinien ein konjugiertes Kurvennetz von Γ_r. — Die involutorische Kollineation

$$x_1^* = x_3,\ x_2^* = -x_4,\ x_3^* = x_1,\ x_4^* = -x_2 \tag{5.2}$$

vertauscht die Punkte I und J sowie $\bar{I}$ und $\bar{J}$, erhält also das Rechtsnetz $\{r\}$. Sie führt außerdem die Gruppe $G_{p,q}$ (2.4) in die Gruppe $G_{-p/q,\,1/q}$ über, wobei der Kennwert $c = p/(q-1)$ unverändert bleibt. Hieraus folgt, daß die Schar der Rechtszylinder Γ_r in sich übergeht und bloß die Schichtenlinien mit den Meridianen vertauscht werden. *Die Meridiankurven sind mithin zu den Schichtenlinien kollinear.*

d) Die *krummen Schmieglinien* für $p = -2c$, $q = -1$. Die Bahnkurven der Gruppe $G_{-2c,\,-1}$ sind nämlich nach einer Bemerkung in Abschn. 2 *Gewindekurven*, und da die Gewinde (2.6c), denen sie einzeln angehören, auch das Netz $\{r\}$ mit den Erzeugenden von Γ_r enthalten, so kann ein Satz von *F. Klein* angewendet werden, wonach jede Gewindekurve auf einer Gewindefläche (die beide demselben Gewinde entnommen sind) Schmieglinie ist. — Im Sinne von *K. Strubecker* kann die Fläche Γ_r übrigens als *Wendelfläche* der indefiniten Schraubung $G_{-2c,\,-1}$ angesehen werden, weil ihre Erzeugenden das Schraubachsenpaar IJ, $\bar{I}\bar{J}$

treffen; auch auf den nichteuklidischen Wendelflächen sind aber die Schraublinien mit den krummen Schmieglinien identisch [7]. Dieselben verlaufen im vorliegenden Fall auf den durch (2.5) dargestellten, untereinander kongruenten *orthogonalen hyperbolischen Paraboloiden* durch das gemeinsame Erzeugendenvierseit $\bar{I}\bar{I}\bar{J}\bar{J}$.

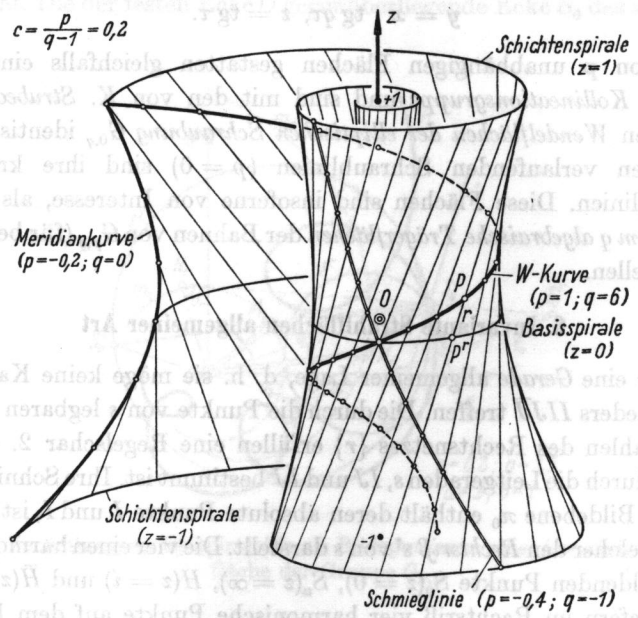

Abb. 2. Invarianter Cliffordscher Rechtszylinder der Gruppe $G_{p,q}$.

Analoge Aussagen wie für Γ_r lassen sich natürlich auch für die invarianten *Cliffordschen Linkszylinder* Γ_l machen.

Faßt man eine Bahnkurve k als Schnitt der durch sie legbaren rechts- bzw. linksprojizierenden Flächen Γ_r und Γ_l auf, so leitet sich daraus eine einfache *Tangentenkonstruktion* für k ab: Man erhält die Tangente t in einem Punkt P von k als Schnittgerade der beiden Tangentialebenen γ_r und γ_l an Γ_r bzw. Γ_l. Die Spur von $\gamma_r(\gamma_l)$ in der Bildebene π_0 geht durch $P^r(P^l)$ und ist parallel zur Tangente an die Schichtenspirale in P, schließt daher mit der Meridianebene Pz den Kurswinkel $\sigma_r(\sigma_l)$ ein; der Spurenschnittpunkt T_0 ist daher ein leicht angebbarer Tangentenpunkt (Abb. 1).

Bei der Besprechung der invarianten Netzflächen sind schließlich noch die dem Netz mit den reellen Brennlinien II, $J\bar{J}$ angehörenden zu erwähnen. Sie entstehen durch Einwirkung der Gruppe $G_{p,q}$ auf irgendeinen Normalstrahl der z-Achse und bilden daher eine *Drehschar aus kongruenten Konoiden*. Als Prototyp mag die von der x-Achse erzeugte Fläche dienen, gemäß (2.4) beschrieben durch

$$y = x \,.\, \operatorname{tg} q\tau,\ z = \operatorname{tg} \tau. \tag{5.3}$$

Diese von p unabhängigen Flächen gestatten gleichfalls eine *zweigliedrige Kollineationsgruppe* und sind mit den von *K. Strubecker* [6] studierten *Wendelflächen der elliptischen Schraubung* $G_{0,q}$ identisch. Die auf ihnen verlaufenden Schraublinien ($p = 0$) sind ihre krummen Schmieglinien. Diese Flächen sind insoferne von Interesse, als sie bei *rationalem q algebraische Trägerflächen* der Bahnen von $G_{p,q}$ (für beliebiges p) darstellen.

6. Invariante Strahlflächen allgemeiner Art

Sei s eine *Gerade* allgemeiner Lage, d. h. sie möge keine Kante des Fixtetraeders $II\bar{J}\bar{J}$ treffen. Die durch die Punkte von s legbaren Projektionsstrahlen des Rechtsnetzes $\{r\}$ erfüllen eine Regelschar 2. Grades, welche durch die Leitgeraden s, IJ und $\bar{I}\bar{J}$ bestimmt ist. Ihre Schnittkurve mit der Bildebene π_0 enthält deren absolute Punkte I und $\bar{I}$, ist also ein *Kreis*, welcher den *Rechtsriß* s^r von s darstellt. Die vier einen harmonischen Wurf bildenden Punkte $S_0(z = 0)$, $S_u(z = \infty)$, $H(z = i)$ und $\bar{H}(z = -i)$ von s liefern im Rechtsriß vier harmonische Punkte auf dem Kreis s^r. Wegen $H^r = \bar{I}$ und $\bar{H}^r = I$ liegen einander demnach der „Bildspurpunkt" $S_0 = S_0{}^r$ und der (rechte) „Netzfluchtpunkt" S_u^r auf s^r genau gegenüber. — Bestimmt man in analoger Weise den Linksriß s^l der Gerade s als Kreis über dem Durchmesser $S_0S_u^l$ und bedenkt man, daß S_u^l und S_u^r als Netzrisse des Fernpunktes S_u (Winkelkote $\pi/2$) spiegelbildlich bezüglich des Ursprungs O liegen, so erkennt man, daß die Mittelpunkte M_r, M_l der Bildkreise s^r, s^l zusammen mit den Punkten O und S_0 ein *Parallelogramm* $OM_rS_0M_l$ bilden (Abb. 3).

Läßt man nun auf den Strahl s die Gruppe $G_{p,q}$ einwirken, so erzeugt er eine gegenüber der Gruppe *invariante Strahlfläche* Σ, welche im Sinne von Abschn. 2 als „quasielliptische Regelspiralfläche" angesprochen werden könnte. — Für diese Fläche soll nun die *Bildspurkurve* $h = \Sigma\pi_0$, also der Ort der Punkte S_0 untersucht werden. Zufolge Satz 1 durchlaufen die Bildkreise s^r und s^l von s zwei Ähnlichkeitsscharen, deren genauere

Kennzeichnung durch das Veränderungsgesetz des Parallelogramms $OM_rS_0M_l$ vollständig gegeben ist: Die Eckpunkte M_r und M_l durchlaufen mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten $q-1$ bzw. $q+1$ zwei im Ursprung zentrierte *logarithmische Spiralen* m_r bzw. m_l, deren Kurswinkel gemäß Satz 2 durch $\operatorname{ctg}\sigma_r = p/(q-1)$ bzw. $\operatorname{ctg}\sigma_l = p/(q+1)$ bestimmt sind; das Seitenverhältnis des Parallelogramms bleibt mithin konstant. Die der festen Ecke O gegenüberliegende Ecke S_0 des solcherart

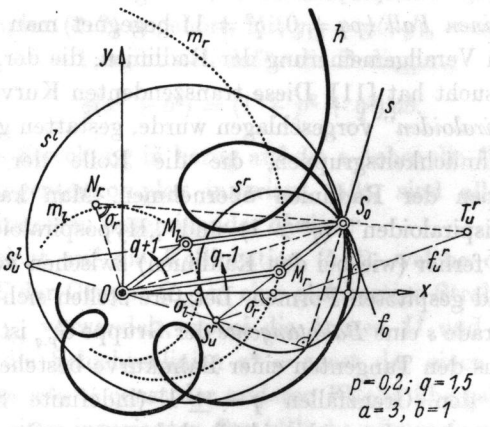

Abb. 3. Verschlungene Epispiraloide als Bildspurkurve einer invarianten Strahlfläche der Gruppe $G_{p,q}$.

beweglichen Parallelogramms beschreibt dann die gesuchte *Spurkurve* h von Σ (Abb. 3)[2].

[2] Die in Abb. 3 eingetragene *Tangentenkonstruktion* der Spurkurve h beruht auf folgender Überlegung: Die Tangente f_0 ist die Bildspur der die Strahlfläche Σ in S_0 berührenden Tangentialebene φ, welche von der Erzeugenden s und der zu S_0 gehörigen Bahntangente t aufgespannt wird. Letztere ist als Schnitt der Tangentialebenen γ_r und γ_l an die Cliffordschen Projektionszylinder Γ_r und Γ_l der Bahnkurve k von S_0 zu finden. Die rechte Netzfluchtspur von γ_r ist die Normale der Basisspirale k^r von Γ_r, jene von γ_l liegt bezüglich O symmetrisch zur Normale der Basispirale k^l von Γ_l. Im Schnitt dieser Netzfluchtspuren liegt der Netzfluchtpunkt T_u^r von t, dessen Verbindung mit S_u^r die Netzfluchtspur f_u^r von φ ergibt, zu welcher die gesuchte Tangente f_0 senkrecht ist. — Einfache Teilverhältnisbeziehungen gestatten die Konstruktion von T_u^r abzukürzen: Bezeichnet N_r den zu S_0 gehörigen Krümmungsmittelpunkt von k^r (der Krümmungsradius N_rS_0 erscheint bekanntlich aus O unter rechtem Winkel), so ergibt sich T_u^r aus S_0 durch zentrische Streckung mit dem Faktor q von N_r aus.

Im Spezialfall der *elliptischen Schraubung*, gekennzeichnet durch $p = 0$, treten wegen $\sigma_r = \sigma_l = \pi/2$ anstelle der Spiralen m_r, m_l konzentrische *Kreise*. Die Seiten des genannten Parallelogramms haben also unveränderliche Längen und es stellt einen leicht realisierbaren Mechanismus dar, der in bekannter Weise *Radlinien* (*Trochoiden*) erzeugt. Die solcherart als Spurkurven und Schichtenlinien von (normierten) elliptischen Regelschraubflächen Σ auftretenden Epitrochoiden ($q^2 > 1$) oder Hypotrochoiden ($q^2 < 1$) wurden vom Verfasser schon bei früherer Gelegenheit festgestellt [10].

Im *allgemeinen Fall* ($pq \neq 0$, $q^2 \neq 1$) begegnet man nun einer bemerkenswerten Verallgemeinerung der Radlinien, die der Verfasser erst kürzlich untersucht hat [11]. Diese transzendenten Kurven, für welche der Name „*Spiraloiden*" vorgeschlagen wurde, gestatten gewisse diskontinuierliche Ähnlichkeitsgruppen, die die Rolle der automorphen Drehungsgruppen der Radlinien übernehmen. Man kann auch hier zwischen „Epispiraloiden" ($q^2 > 1$) und „Hypospiraloiden" ($q^2 < 1$) unterscheiden, ferner (wie bei den Radlinien) zwischen verschlungenen, gestreckten und gespitzten Formen. Letztere stellen sich ein, wenn die erzeugende Gerade s eine *Bahntangente* der Gruppe $G_{p,q}$ ist; die Fläche Σ ist dann die aus den Tangenten einer Bahnkurve bestehende *invariante Torse*. — In den Grenzfällen $q = \pm 1$ (indefinite Schraubungen) entstehen die als „*Logarithmoiden*" bekannten Grenzformen der Spiraloiden. Im Grenzfall $q = 0$ schließlich stößt man auf *affine logarithmische Spiralen*.

Satz 4. *Die Bildspurkurven und die dazu ähnlichen Schichtenlinien der normierten, durch eine Gruppe $G_{p,q}$ mit $pq \neq 0$ erzeugten Strahlflächen sind für $q^2 \neq 1$ Spiraloiden, für $q^2 = 1$ Logarithmoiden. Im besonderen treten gespitzte Formen auf, falls die Strahlflächen Torsen sind.*

Zur *analytischen Darstellung* genügt es, die Ausgangslage der erzeugenden Geraden s als Normale der x-Achse anzunehmen; dies bedeutet bloß, von einer zusammengeklappten Form des Parallelogramms $OM_rS_0M_l$ auszugehen, die ja irgendwann einmal sicher eingenommen wird. Die Gerade s sei also festgelegt durch die beiden Punkte $A(a:0:0:1)$ und $B(0:b:1:0)$. Unter Einwirkung einer Transformation (2.4) der Gruppe $G_{p,q}$ gelangen diese Punkte nach

$$\begin{aligned} A'(\quad & a\, e^{p\tau} \cos q\tau : a\, e^{p\tau} \sin q\tau : \sin\tau : \quad \cos\tau), \\ B'(- \, & b\, e^{p\tau} \sin q\tau : b\, e^{p\tau} \cos q\tau : \cos\tau : - \sin\tau). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Linearkombination mit den Faktoren $\cos\tau$ und $-\sin\tau$ liefert dann

den Bildspurpunkt $x_3 = 0$ der Geraden $s' = A'B'$. Die komplexe Zusammenfassung seiner inhomogenen Koordinaten

$$x + iy = e^{p\tau}\left[\frac{a+b}{2} \cdot e^{i(q-1)\tau} + \frac{a-b}{2} \cdot e^{i(q+1)\tau}\right] \tag{6.2}$$

beschreibt dann in ihrer Abhängigkeit von τ den reellen Zug der Spurkurve. Deren kinematische Erzeugung mittels des beweglichen Parallelogramms ist unmittelbar abzulesen.

Die *gespitzte Form* liegt vor, wenn der Strahl $s = AB$ dem Bahntangentenkomplex (2.7) angehört. Mit $g_{12} = ab$, $g_{13} = a$, $g_{14} = g_{23} = 0$, $g_{24} = -b$, $g_{34} = -1$ ergibt sich dafür die Bedingung

$$q(a^2 + b^2) = (1 + p^2 + q^2)\, ab. \tag{6.3}$$

Da eine axiale Streckung in bezug auf die z-Achse die Gruppe $G_{p,q}$ und ihren Bahntangentenkomplex invariant läßt, sind alle auftretenden gespitzten Spiraloiden untereinander *ähnlich*.

Mit Rücksicht auf die Kollineation (5.2), welche die betrachtete Strahlfläche Σ der Gruppe $G_{p,q}$ in eine gleichartige Strahlfläche Σ^* der Gruppe $G_{-p/q,\,1/q}$ verwandelt, wobei die Achsen $I\bar{I}$ und $J\bar{J}$ vertauscht werden, also die Schichtenlinien $z^* = \text{const}$ der einen Fläche in die *Meridiankurven* $x/y = \text{const}$ der anderen Fläche übergehen, folgt, daß die Meridiane einer invarianten Strahlfläche allgemeiner Art *kollineare Spiraloiden* sind.

7. Sätze über Spiraloiden

Derselbe Gedanke, der in [10] Sätze über Radlinien lieferte, führt im vorliegenden Rahmen auf Sätze über Spiraloiden, wenn man sich auf die allgemeine Annahme ($pq \neq 0$, $q^2 \neq 1$) beschränkt. Die in den ausgeschlossenen Grenzfällen vorzunehmenden Modifikationen sind leicht zu übersehen.

Man betrachte einmal ein *Ebenenbüschel* mit reeller Achse s, auf welches die Gruppe $G_{p,q}$ einwirkt, und verfolge die Verlagerung seines auf Grund der Invarianz der absoluten Punkte I, $\bar{I}$ *kongruent-veränderlichen Spurenbüschels* in der Bildebene π_0. Jede Büschelebene ε hüllt eine invariante Torse ein, so daß die Bildspur e_0 von ε gemäß Satz 4 längs einer gespitzten Spiraloide gleitet. Der Spurpunkt S_0 von s wandert hingegen auf einer verschlungenen, gestreckten oder gespitzten Spiraloide, vorausgesetzt, daß s nicht dem invarianten Rechts- oder Linksnetz angehört; in diesem Sonderfall beschreibt S_0 eine logarithmische Spirale,

was auf die in [11] zum Ausgang genommene kinematische Erzeugung der gespitzten Spiraloiden führt:

Satz 5. *Dreht sich eine Gerade mit konstanter Geschwindigkeit um einen ihrer Punkte, während dieser mit davon verschiedener konstanter Winkelgeschwindigkeit auf einer logarithmischen Spirale weiterwandert, so hüllt sie eine gespitzte Spiraloide ein*[3].

Jede gespitzte Spiraloide gestattet sogar eine *doppelte Erzeugung* dieser Art, da ja die Ebene ε je einen Strahl aus $\{r\}$ und $\{l\}$ enthält.

Hat die Büschelachse s jedoch allgemeine Lage, so erhält man — als Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über Zykloiden — in erlaubter Umkehrung die Aussage:

Satz 6. *Gleiten zwei Strahlen eines starren Strahlbüschels längs zweier konzentrischen, gleichsinnig-ähnlichen gespitzten Spiraloiden, so umhüllt auch jeder weitere Büschelstrahl eine dazu ähnliche Kurve und der Büschelscheitel beschreibt im allgemeinen eine verschlungene oder gestreckte Spiraloide.*

Insbesondere sind die *isoptischen Kurven einer gespitzten Spiraloide* im allgemeinen verschlungene oder gestreckte Spiraloiden.

Betrachtet man in ähnlicher Weise ein *Bündel* mit reellem Scheitel P, auf welches die Gruppe $G_{p,q}$ einwirkt, so ruft dieses ein *ähnlich-veränderliches Spurfeld* in der Bildebene π_0 hervor. Die Punkte dieses Feldes wandern als Spurpunkte von Bündelstrahlen durchwegs auf Spiraloiden, mit Ausnahme der beiden Punkte P^r und P^l, welche als Spurpunkte der Netzstrahlen r und l durch P logarithmische Spiralen beschreiben. Die Geraden des Feldes umhüllen als Spuren von Bündelebenen durchwegs gespitzte Spiraloiden, mit Ausnahme des Ursprungsstrahls, der ein Strahlbüschel durchläuft.

Satz 7. *Wandern zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Feldes auf zwei konzentrischen logarithmischen Spiralen mit verschiedenen Kurswinkeln, so zwar, daß ihre Zentralabstände stets übereinstimmen, dann beschreiben alle anderen Punkte Spiraloiden und alle von der Symmetrale verschiedenen Geraden hüllen gespitzte Spiraloiden ein.*

Unter den ∞^2 Bündelstrahlen sind jene ∞^1 ausgezeichnet, welche *Bahntangenten* der Gruppe sind, also dem quadratischen Komplex (2.7) angehören. Sie erfüllen den *Komplexkegel 2. Ordnung* Δ von P, der auch die Strahlen nach $I, I, J, \bar{J}$ enthält, mithin die Bildebene π_0 nach

[3] Der hier eingeschlossene Grenzfall der *Logarithmoide* stellt sich beim Geschwindigkeitsverhältnis $\pm$ 1 : 2 ein.

einem *Kreis* schneidet. Alle Punkte dieses Kreises laufen demnach auf *gespitzten Spiraloiden*. Zu den Punkten dieses Kreises gehört insbesondere der Spurpunkt T_0 der Bahntangente t von P. Seine (gespitzte) Ortsspiraloide wird gleichzeitig von der Spur t_0 der Bahnschmiegebene τ von P eingehüllt. Sei e eine zweite Erzeugende des Kegels Δ und Q jener Punkt, dessen Bahntangente e ist: die Bahnschmiegebene ε von Q enthält neben e auch die Bahntangente t von P, und ihre Hüllspiraloide ist mit der Spurspiraloide von e identisch. Wegen der Konstanz des Spurenwinkels von τ und ε gilt mithin:

Satz 8. *Die Evolute und sämtliche Evolutoiden einer gespitzten Spiraloide sind zu dieser ähnlich.*

Daß die Evolute einer gespitzten Spiraloide zu dieser auch kongruent und sogar mit ihr zusammenfallen kann, daß solche Kurven also nichttriviale Beispiele für „Autoevoluten" liefern, wurde in [11] und [12] näher ausgeführt. Vermerkt sei ferner, daß sich unter den imaginären Evolutoiden auch zwei logarithmische Spiralen finden; sie rühren von den durch J bzw. $\overline{J}$ gehenden Ebenen des Büschels t her.

Nach den obigen Ausführungen kann nun die Bewegung des ähnlichveränderlichen Spurfeldes auch folgendermaßen gekennzeichnet werden:

Satz 9. *Durchläuft von zwei Punkten eines ähnlich-veränderlichen Feldes einer eine gespitzte Spiraloide, während der zweite jeweils den Platz der zugehörigen Krümmungsmitte einnimmt, so beschreiben die Punkte, aus welchen die beiden Führungspunkte unter rechtem Winkel erscheinen, dazu ähnliche Kurven, nämlich die Evolutoiden der ersten Kurve. Alle übrigen Punkte wandern hingegen auf verschlungenen oder gestreckten Spiraloiden, bis auf zwei, welche logarithmische Spiralen beschreiben.*

Literatur

[1] *W. Blaschke:* Euklidische Kinematik und nichteuklidische Geometrie. Z. Math. Phys. 60 (1911), 61—91.

[2] *F. Hohenberg:* Parallelprojektionen in nichteuklidischen Räumen. Monatsh. Math. Phys. 42 (1935), 425—437.

[3] *S. Lie:* Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Leipzig 1893, 68ff.

[4] *E. Müller-E. Kruppa:* Die linearen Abbildungen. Leipzig-Wien 1923, 240ff.

[5] *G. Scheffers:* Besondere transzendente Kurven. Enzykl. Math. Wiss. III D 4, 204ff.

[6] *K. Strubecker:* Über die Schraubungen des elliptischen Raumes. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 139 (1930), 421—450.

[7] *K. Strubecker:* Über nichteuklidische Schraubungen. Monatsh. Math. Phys. 38 (1931), 63—84.

[8] *K. Strubecker:* Über kubische Verwandtschaften bei nichteuklidischen Schraubungen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 140 (1931), 545—578.

[9] *L. Tuschel:* Über eine Schraubliniengeometrie und ihre konstruktive Verwertung. Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien 120 (1911), 231—254.

[10] *W. Wunderlich:* Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Monatsh. Math. Phys. 44 (1936), 249—279.

[11] *W. Wunderlich:* Sur une certaine généralisation des cycloïdes. Simon Stevin 36 (1962), 57—71.

[12] *W. Wunderlich:* Autoevoluten. Elem. Math. 17 (1962), 121—128.

Printed in Austria