TECHNISCHE HOCHSCHULE IN WIEN

ANTRITTSREDE

DES RECTOR MAGNIFICUS

O. HOCHSCHULPROFESSOR

UND VORSTAND DES II. INSTITUTS FÜR GEOMETRIE

Dr. techn. WALTER WUNDERLICH

«GEOMETRIE UND SCHÖNHEIT»

ANLÄSSLICH DER INAUGURATIONSFEIER

AM 6. NOVEMBER 1964

WIEN 1964

VERLAG DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE WIEN

GEOMETRIE UND SCHÖNHEIT

Hochansehnliche Festversammlung!

Nach altem Brauch geziemt es dem neuen Rektor, zu den versammelten Festgästen über sein engeres Arbeitsgebiet zu sprechen. In meinem Fall handelt es sich um die Geometrie, die ich an dieser Hochschule vor allem in ihren Beziehungen zur Technik zu vertreten habe. Über dieses Fach vor einem breiten Publikum zu reden, das mit wenigen Ausnahmen ganz anders orientierte Interessen verfolgt und zum Teil vielleicht mit Reminiszenzen an schlechte Lehrer noch aus der Schulzeit her sogar eine gewisse Aversion gegen die Geometrie hegt, ist auch für einen seiner Wissenschaft mit Leib und Seele Ergebenen keine leichte Aufgabe. Hinzu kommt noch, daß erst in jüngster Zeit meine Fachkollegen und ehemaligen Lehrer KRUPPA und KRAMES zu einschlägigen Ausführungen das Wort ergriffen haben: Prof. KRUPPA berichtete in seiner Inaugurationsrede 1953 über „Darstellende Geometrie einst und jetzt", Prof. KRAMES 1961 über „Die Bedeutung der Geometrie für Naturwissenschaften und Technik".

Erlauben Sie mir also heute, in zwangloser Weise gewisse ästhetische Aspekte zu beleuchten, die den Geometer und viele Liebhaber der Geometrie bewußt oder unbewußt in ihrer Begeisterung bestärken. Der etwas anspruchsvolle Titel „Geometrie und Schönheit" darf dabei nicht so verstanden werden, daß ich mich etwa anheischig machen wollte, das subjektive und auch in der Wissenschaft der Mode unterliegende Schönheitserlebnis mit mathematischen Methoden zu analysieren und zu sezieren, womit es wohl restlos zerstört würde. Ich möchte lediglich versuchen, Außenstehenden klarzumachen, was den Geometer veranlaßt, manche der ihn bewegenden Dinge als schön zu empfinden und zu bezeichnen. Leider gestatten es die Umstände nicht, die Darlegungen durch Bilder zu begleiten, was den Kontakt und das Verständnis sehr erleichtern würde.

Daß der für gewöhnlich als nüchtern, trocken und kalt verschriene Mathematiker überhaupt das Attribut „schön" zu verwenden bereit ist, zeigt, daß ihm menschliche Regungen durchaus nicht fremd sind. Er kann bei gegebenem Anlaß nicht umhin, eine

Theorie, eine Methode, eine Anwendung, einen Beweis, ein Ergebnis als „schön“ zu bezeichnen, weil sie ihm aus dem Rahmen des Gewohnten hervorstechend erscheinen und ihn in besonderem Maße befriedigen, ja, beglücken. Schönheit wird in seinem Arbeitsbereich fast immer mit dem Begriff der Ordnung, der Gesetzmäßigkeit verknüpft sein, die den Gegenstand seiner Betrachtungen beherrscht oder einen Zusammenhang zwischen oft recht verschiedenartigen Gebieten vermittelt. Beim Geometer kommt über die rein gedankliche Schönheit hinaus noch die visuelle Schönheit hinzu, also die sinnliche Freude bei der Betrachtung von materiellen oder vorgestellten Gebilden, die seiner Phantasie entsprossen sind und in Aufbau oder Anordnung bestimmte Gesetze erkennen lassen.

Die Schönheit steht in der Geometrie bereits bei ihrem klassischen Grundkonzept Pate. Hierzu erscheint es mir notwendig, ein wenig auf die Entwicklungsgeschichte der Geometrie einzugehen. Seit EUKLID, dem großen Alexandriner, der um 300 vor Christi Geburt lebte, wird das Lehrgebäude der Geometrie nach folgendem Prinzip aufgebaut: Man geht aus von gewissen Elementen oder Grundbegriffen, genannt „Punkte“ und „Geraden“; zwischen diesen Elementen bestehen gewisse Grundbeziehungen, die durch Worte wie „liegen“, „zwischen“, „kongruent“ usw. beschrieben werden. Die Formulierung der Gesetze, denen diese Beziehungen unterliegen, erfolgt durch bestimmte, mehr oder weniger naheliegende und daher nicht weiter begründete Annahmen, heute durchwegs „Axiome“ genannt; beispielsweise: „Zu zwei Punkten gibt es eine und nur eine Gerade, auf der sie liegen“, oder: „Von drei Punkten einer Geraden liegt immer ein einziger zwischen den beiden anderen“. Mit Hilfe der erwähnten Grundbeziehungen können nun weitere geometrische Objekte definiert werden, etwa: „Eine Strecke ist die Gesamtheit aller Punkte einer Geraden, die zwischen zwei Punkten dieser Geraden liegen“. Der weitere Ausbau der Geometrie erfolgt dann durch fortgesetzte Definitionen und auf die Axiome gegründete logische Schlüsse, also „Beweise“, die Aussagen über die definierten Gebilde liefern, sogenannte „Lehrsätze“, auf die sich die weiteren Entwicklungen dann so wie auf die am Anfang stehenden Axiome stützen dürfen. Unabdingbare Forderung dabei ist, daß sich auch in der Folge alle Definitionen und Beweise stets ausschließlich auf bereits gesichertes Gut stützen, also letzten Endes auf die Grundbegriffe und Axiome zurückführen lassen, und nicht etwa bewußt oder unbewußt andere Hilfsmittel heranziehen.

Dieses grundlegende, zweifellos als „schön“ zu bezeichnende Prinzip, eine Theorie aus einem Minimum von Grundbegriffen und Axiomen logisch zu entwickeln, ist seither auf alle Teilgebiete der Mathematik ausgedehnt worden. Es war die revolutionierende Leistung der Griechen, mit diesem Prinzip eine neue Ära der Geometrie eröffnet zu haben. Die neue Vorgangsweise erlaubte, alle Einzelkenntnisse der Vorläufer von einer schmalen Basis aus zu gewinnen, und zog einen scharfen Trennungsstrich zwischen empirischen, teils exakten, teils nur näherungsweise richtigen Verfahrensregeln der Ägypter und Babylonier und den streng gültigen Ergebnissen der griechischen Schule.

Die Richtigkeit der gewonnenen Resultate ist nach dem Gesagten eigentlich nur eine relative, nämlich bloß insoweit anzuerkennen, als man geneigt ist, das postulierte Axiomensystem zu unterschreiben. Die Möglichkeit, allenfalls auch noch die Regeln der Logik anzufechten, soll außer Betracht gelassen werden. Jedenfalls wird aber bereits verständlich, daß man nicht mehr von *der* Geometrie schlechtweg sprechen kann, weil es offenbar soviele verschiedene Geometrien geben wird, als man nichtäquivalente Axiomensysteme aufstellen kann, welche die der Geometrie eigenen Begriffe und Beziehungen regeln sollen.

Nun ist es allerdings nicht so, daß man ein Axiomensystem ganz willkürlich zusammenphantasieren kann. Als oberstes Gebot gilt, daß ein Axiomensystem widerspruchsfrei sein muß. Es darf also nicht etwa möglich sein, aus dem System einen Satz und gleichzeitig sein Gegenteil zu beweisen, weil sonst das ganze Lehrgebäude seinen Sinn verlöre. Weitere Forderungen, die man heute an ein Axiomensystem zu stellen pflegt, wie Unabhängigkeit und Vollständigkeit, sind nicht so wesentlich, sondern entspringen wieder mehr einem Schönheitsbedürfnis, nämlich dem Wunsche, einerseits nichts Überflüssiges zu verlangen und anderseits von vornherein alles vorzusehen, was später benötigt wird.

In der Tat gibt es nun trotz der Einschränkung durch die notwendige Widerspruchsfreiheit wesentlich verschiedene geometrische Axiomensysteme und dementsprechend durchaus verschiedene Geometrien. Geometrie hat damit den Charakter eines Spieles angenommen, eines Spieles mit den Grundbegriffen als Spielelementen und den Axiomen als Spielregeln. In diesem Sinne ist auch ein

Ausspruch J. v. NEUMANNs, des Vaters der modernen Rechenautomaten, zu verstehen, wonach die Mathematik das faszinierendste Spiel ist, das Menschengeist je erdacht hat.

Inwieweit eine Geometrie nun tatsächlich bloß ein Spiel ist oder aber weitergehendes Interesse beanspruchen darf, hängt nicht zuletzt davon ab, ob sie praktische oder theoretische Anwendungsmöglichkeiten bietet. So wurden beispielsweise ausgefallene ebene Geometrien studiert, die nur mit endlich vielen Punkten und Geraden operieren, was in krassem Gegensatz zu den gewohnten Vorstellungen steht — und doch von Bedeutung für gewisse statistische Versuchsplanungen etwa in der Landwirtschaft geworden ist. Andere Geometrien wieder, die in Räumen mit mehr als drei Dimensionen, ja sogar in Räumen mit unendlich vielen Dimensionen arbeiten, sind für eine vereinfachte Ausdrucksweise in der modernen Physik, in der neueren Analysis und noch manchen anderen Anwendungsgebieten von unschätzbarem Wert geworden.

Trotz allem hat aber die klassische euklidische Geometrie eine unerschütterte Vorrangstellung bewahrt, weil sie den Gegebenheiten des Erfahrungsraumes, in dem wir leben, am besten entspricht, wenn man sich unter Punkten kleinste Partikel und unter Geraden etwa gespannte Fäden oder Lichtstrahlen vorstellt. Das Axiomensystem EUKLIDs war allerdings nicht ganz frei von Mängeln — unter anderem war es keineswegs vollständig —, doch bemühte es sich, die von der Anschauung diktierten Vorstellungen zu fixieren und damit ein brauchbares Fundament für das Studium der Lage- und Maßbeziehungen in unserem Lebensraum zu sichern. Die Axiome betreffen — mit einer einzigen Ausnahme, dem sogenannten Parallelenaxiom — Feststellungen, die so trivial erschienen, daß sie über alle Zweifel erhaben waren. So gesehen hatte das euklidische Lehrgebäude seinerzeit noch etwas Absolutes und galt als unumstößliche Wahrheit, an deren Stelle nichts anderes denkbar war.

So kam es, daß die Lehrbücher EUKLIDs durch mehr als zwei Jahrtausende die Grundlage des Geometrieunterrichts an den Schulen bildeten. Sie boten zweifellos eine gute Gelegenheit, das logische Denken an Hand strenger Beweisketten zu schulen. Es sollte jedoch nicht übersehen werden, daß das Verständnis solcher Gedankengänge eine gewisse Reife voraussetzt. Für ein kindliches Gemüt sind sie noch nicht geeignet, wie erfahrene Pädagogen bestätigen. Die Einsicht für die Notwendigkeit von Beweisen und das Empfinden für die erhabene Schönheit eines unanfechtbaren logischen Aufbaus entwickelt sich bloß allmählich und kann wohl erst auf Hochschulstufe erwartet werden. Nichts ist verkehrter, als den Jugendlichen zu früh mit Abstraktionen zu quälen, die ihm ohne ausreichenden Erfahrungsschatz trocken und inhaltslos erscheinen und nur Abneigung gegen alles hervorrufen, was zur Geometrie und Mathematik gehört. In dieser Hinsicht braucht sich unser österreichisches Schulwesen, das seit langem auf eine intensive Pflege der Anschauung Gewicht legt, vorläufig noch keine Vorwürfe zu machen.

Einen Stein des Anstoßes bildete im euklidischen Axiomensystem das vorhin erwähnte Parallelenpostulat, welches aussagt, daß es in der Ebene durch jeden Punkt eine und nur eine Gerade gibt, welche zu einer gegebenen, den Punkt nicht enthaltenden Geraden „parallel" ist, d. h. diese nicht trifft. Diese Aussage, an deren Richtigkeit man zunächst durchaus nicht zweifelte, hatte im Vergleich zu den übrigen Axiomen mehr den Charakter eines Lehrsatzes, und so bemühte man sich immer wieder, sie aus den anderen Axiomen zu beweisen. Nach langen, vergeblichen Versuchen reifte erst zu Beginn des vorigen Jahrhunderts bei GAUSS und einigen seiner Zeitgenossen die Einsicht, daß dieses Parallelenaxiom tatsächlich unbeweisbar ist, weil es durch ein gegenteiliges ersetzt werden kann, ohne daß sich deshalb Widersprüche einstellen. So kam es schließlich nach Überwindung ungeheurer Vorurteile zur Geburt der sogenannten nichteuklidischen Geometrien, die der euklidischen gleichberechtigt zur Seite stehen und sich von ihr im wesentlichen durch den Parallelenbegriff unterscheiden: die hyperbolische Geometrie BOLYAIs und LOBATSCHEFSKYs, bei der es durch jeden Punkt unendlich viele, einen bestimmten Sektor erfüllende Geraden gibt, die eine gegebene Gerade nicht treffen, und die elliptische Geometrie RIEMANNs, in der es überhaupt keine Parallelen gibt, die allerdings auch noch in anderer Hinsicht von der euklidischen Geometrie abweicht, indem bei ihr alle Geraden eine endliche Länge besitzen. Es ist keineswegs übertrieben, wenn man behauptet, daß die nichteuklidischen Geometrien ihre Entdeckung dem Ringen nach Schönheit verdanken, da sie ja aus dem Bestreben hervorgingen, das störende, als unschön empfundene Parallelenaxiom zu beseitigen. — Das heute übliche, einwandfreie und allen Ansprüchen an Strenge gerecht werdende Axiomensystem der euklidischen Geometrie wurde übrigens erst zu Anfang unseres Jahrhunderts von dem deutschen Mathematiker HILBERT aufgestellt.

Nach dem Gesagten ist es klar, daß man bei Fortlassung einzelner Axiome nicht das gesamte Lehrgebäude der Geometrie erhalten kann, sondern nur einen Teil. Diesem Teilgebiet kommt dafür erhöhte Bedeutung zu, weil es unter Umständen verschiedenen Geometrien gemeinsam ist. Ein wichtiges Teilgebiet dieser Art ist die sogenannte projektive Geometrie. Sie verzichtet auf alle Kongruenzbeziehungen, kennt also Begriffe wie Länge einer Strecke, Größe eines Winkels, parallele Lage usw. überhaupt nicht. Sie begnügt sich mit wohlabgestimmten Lageaxiomen, die aussagen, daß es zu zwei Punkten genau eine Verbindungsgerade gibt, daß zwei Ebenen stets eine Schnittgerade besitzen usf., wozu dann noch modifizierte Anordnungs- und Stetigkeitsaxiome treten. Trotzdem ergibt sich ein erstaunlich inhaltsreiches Lehrgebäude von überwältigender Schönheit, in welchem zwar Sätze wie der pythagoreische etwa keinen Platz haben, dessen Aussagen über ebene Figuren aber selbst dann noch bestehen bleiben, wenn man diese Figuren der einschneidenden Veränderung durch beliebig viele Zentralprojektionen unterwirft. Alle Aussagen bestehen übrigens auch im Rahmen der euklidischen Geometrie, wenn man nur zu den eigentlichen Punkten noch uneigentliche oder unendlich ferne Punkte hinzunimmt, die die Rolle des Schnittpunktes paralleler Geraden zu übernehmen haben. In der projektiven Geometrie herrscht überdies eine wunderschöne Gegenüberstellung von Brudersätzen, die durch das sogenannte Dualitätsgesetz verknüpft sind: Zu jedem Lehrsatz über räumliche Figuren existiert ein Brudersatz, der sich einfach dadurch ergibt, daß man in der Formulierung des ersten die Begriffe Punkt und Ebene vertauscht, während die Geraden beibehalten werden. Dieser zweite, sicher ebenfalls richtige Satz braucht nun gar nicht eigens bewiesen zu werden, weil man genau weiß, wie er zu beweisen wäre: Man hätte auch im Beweisgang des ersten nur Punkte und Ebenen auszutauschen. Jedem Satz der ebenen Geometrie kann auf diesem Wege ein dualer Satz zur Seite gestellt werden, in welchem Punkte und Geraden ihre Rollen tauschen.

Die bisherigen Ausführungen mögen vielleicht den Eindruck erweckt haben, daß mit der Aufstellung eines vernünftigen Axiomensystems alles getan ist, weil sich ja alle Folgerungen daraus

ableiten. Diese Ansicht wird wohl durch manche Arbeiten der modernen Grundlagenforschung bestärkt, die das Aufsuchen von Lehrsätzen gewissermaßen als Übungsaufgabe abtun. Nichts wäre jedoch verkehrter. Die Herstellung einer Beweiskette zu einem bestimmten Ziel verlangt Scharfsinn, Kombinationsgabe und Intuition, die Weiterentwicklung des geometrischen Lehrgebäudes über die erreichten Höhen hinaus erfordert Enthusiasmus und schöpferische Phantasie, vergleichbar der des Künstlers. Solche Fähigkeiten sind eine Gottesgabe, die nur wenigen Menschen beschieden ist. Das Verfolgen bereits beschrittener Bahnen und die verständnisvolle Bewunderung der dabei erreichten Ergebnisse stehen hingegen allen offen, die Lust zum Denken haben. Als einfache Illustration sei etwa das Studium des Dreiecks und der mit ihm verknüpften Gebilde erwähnt. Sie alle kennen die sogenannten vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks, das sind der Schwerpunkt, der Höhenschnittpunkt, der Umkreismittelpunkt und der Inkreismittelpunkt, und vielleicht erinnern sich manche auch noch an die merkwürdige Eulersche Gerade, auf der die ersten drei der genannten Punkte liegen. Ein Element oder Gebilde heißt dabei „merkwürdig“, wenn es überbestimmt erscheint, also ein Punkt als Schnitt von mehr als zwei Geraden, eine Gerade als Verbindung von mehr als zwei Punkten, ein Kreis, der durch mehr als drei vorliegende Punkte geht usw. Zu den angeführten sind im Laufe der Zeit mehrere hundert weiterer merkwürdiger Punkte, Geraden, Kreise, Kegelschnitte etc. hinzugefügt worden, die vielfach nach berühmten Mathematikern benannt sind, welche es nicht unter ihrer Würde hielten, sich mit einer so einfachen Figur wie dem Dreieck eingehender zu beschäftigen, und dessen Geometrie mit vielen schönen Entdeckungen bereichert haben. Dank seines elementaren Charakters übt dieses reizvolle Gebiet seine Anziehung aber auch auf Amateure aus, und es ist erstaunlich und tröstlich zugleich, feststellen zu können, daß selbst die Elementargeometrie noch keineswegs ausgeschöpft ist.

Ein Ergebnis ist aber nicht schon deshalb schön, weil es wahr ist. Es hat ihm eine gewisse Bedeutung innezuwohnen, mit der es eine interessante Fragestellung in befriedigender Weise klärt, wobei natürlich zuzugeben ist, daß nicht das Interesse aller Menschen, ja nicht einmal das aller Fachgenossen beansprucht werden kann. Auch ein Beweis ist noch lange nicht schön, wenn er bloß richtig ist, so wenig wie eine musikalische Komposition schon deshalb schön ist, weil sie die Regeln der Harmonielehre erfüllt. Es gehört schon mehr dazu, um einem Beweis und erst recht einer ganzen Theorie das Attribut „schön“ zuerkennen zu dürfen: es sind Ansprüche auf Klarheit, Zielstrebigkeit und Eleganz zu berücksichtigen, die alle Umständlichkeiten ausschließen und verlangen, an jeder Stelle Motive und Absichten erkennen zu lassen, wenn ein wahrhaft harmonischer Organismus entstehen soll.

Wie in der Kunst kann auch in der Mathematik der schönste Gedanke durch eine häßliche äußere Form entstellt werden. Diesbezüglich ist eine gewisse Tragik in dem modernen Streben nach immer weiter gehender Formalisierung in der Mathematik zu erblicken, die im Endzustand zu blutleeren, seelenlosen Darstellungen führt, die nicht mehr anzusprechen vermögen. Als frühes Beispiel sind hier sogar die Bücher EUKLIDs anzuführen, die mit ihrer nüchternen Struktur einer ständigen Wiederholung von Definition, Satz und Beweis ausgesprochen ermüdend wirken und die Motivierung der einzelnen Schritte oft vermissen lassen. Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint die Frage des Königs PTOLEMÄUS I. an EUKLID durchaus begreiflich, ob denn kein bequemerer Zugang zur Geometrie führe, und die stolze Antwort, „es gäbe keinen Königsweg zur Geometrie“ war im Grunde genommen recht arrogant. Tatsächlich sind die Ansprüche, die an einen Lehrer hinsichtlich der Gestaltung eines lebendigen, mitreißenden Unterrichts gestellt werden, außerordentlich hoch, und man darf sich nicht wundern, wenn sie nicht jeder zu erfüllen imstande ist, da sie neben dem fachlichen Wissen ein gewisses Maß an künstlerischem, sozusagen dichterischem Talent benötigen.

Lassen Sie mich noch die Hauptzüge der späteren Entwicklung kurz andeuten, als die Geometrie aus langer Erstarrung endlich zu neuem Leben erwachte.

Eine umwälzende Wende brachte ihr das 17. Jahrhundert, als DESCARTES oder CARTESIUS mit der Einführung des Koordinatenbegriffs eine enge Verbindung zum Reich der Zahlen herstellte. Ansätze hierzu sind zwar schon im Altertum aufgetreten, doch gelangten sie mangels einer geeigneten Notation nicht zur Entfaltung. Erst CARTESIUS, der systematisch jeden Punkt der Ebene durch zwei Zahlen zu erfassen lehrte, welche seine Abstände von zwei festen Achsen angeben, eröffnete den Siegeszug der analytischen Methode, die heute in der Geometrie vorherrscht. Die

Punkte der Ebene werden dabei also durch Koordinatenpaare repräsentiert, die Geraden durch lineare Gleichungen, und Entfernungen und Winkel werden durch einfache Formeln bestimmt. Stellt man diese Dinge axiomatisch an die Spitze, so werden alle Grundlagenprobleme in das Gebiet der Arithmetik verschoben. Dies ist ein sehr bequemer Standpunkt, allerdings von jenem EUKLIDs weit entfernt, weil nun von unbewiesenen Voraussetzungen ausgegangen wird, die noch weniger evident sind als selbst das Parallelenpostulat. Die rechnende Methode schaltet jedoch alle Zufälligkeiten und Beschränkungen einer gezeichneten Figur aus und befreit überhaupt von der Notwendigkeit einer Zeichnung, die manchen Mathematikern ein Greuel ist.

Hängen die beiden Koordinaten eines veränderlichen Punktes durch eine mathematische Beziehung zusammen, so durchläuft er im allgemeinen eine krumme Linie, und alle gesetzmäßigen Kurven sind auf diese Weise zu gewinnen. Ist beispielsweise die zweite Koordinate stets gleich dem Quadrat der ersten, so erhält man die Parabel. Läßt man schließlich für die Koordinaten nicht bloß die gewöhnlichen, reellen, sondern auch die von GAUSS eingeführten komplexen Zahlen zu, so erfaßt man neue, sozusagen unsichtbare Punkte, und diese Erweiterung erschließt neue Gesetzmäßigkeiten von ungeahnter Schönheit. So zeigt etwa jede algebraische Kurve — definiert durch eine algebraische Gleichung zwischen den Koordinaten — die wunderbare Eigenschaft, von jeder Geraden in der gleichen Anzahl von Punkten geschnitten zu werden. Hier liegt der Ansatz zu dem großartigen Gebäude der algebraischen Geometrie.

Eine scheinbar unüberwindliche Schranke fällt, wenn man in Verallgemeinerung der Tatsache, daß ein Punkt der Ebene durch zwei Zahlen und analog ein Punkt des Raumes durch drei Zahlen festgelegt wird, den Schritt in höherdimensionale Räume wagt, wo der Punkt durch vier oder noch mehr Zahlen gegeben ist. Solche der natürlichen Anschauung nicht mehr zugängliche Räume bevölkert der Geometer dann mit verschiedenartigen, in Anlehnung an vertraute Dinge definierten Gebilden, die ihm ein unerschöpfliches Tätigkeitsfeld bieten.

Schließlich eröffnet der Einsatz der Differential- und Integralrechnung auf geometrische Fragen ein systematisches Studium stetiger Mannigfaltigkeiten, in erster Linie der krummen Linien und Flächen. Hieraus ist das imposante und vielverzweigte Gebiet der Differentialgeometrie erwachsen.

Inzwischen hat man gelernt, nicht bloß Punkte, sondern auch andere Elemente, wie Gerade, Kreise, Kugeln usw. durch Koordinaten, also bestimmte Zahlengruppen zu kennzeichnen. Dadurch, daß man die Koordinaten der Elemente verschiedener Bereiche in Beziehung setzt, gelangt man zu Transformationen oder Abbildungen im weitesten Sinn solcher Bereiche aufeinander, und damit zu Übertragungsprinzipien, die es gestatten, in einem Bereich geltende Sachverhalte in entsprechende Tatsachen eines anderen Bereiches zu übersetzen. Diese Abbildungsgeometrie greift sowohl in das Gebiet der algebraischen Geometrie als auch in jenes der Differentialgeometrie ein. Insbesondere läßt sich auch die Disziplin der darstellenden Geometrie hier einordnen, die wegen des ihre klassische Form beherrschenden Projektionsbegriffs natürlich auch mit der projektiven Geometrie eng zusammenhängt.

Erst das scharfe analytische Instrument vermochte jahrtausendealte geometrische Probleme zu erledigen, um die sich Generationen von Mathematikern vergeblich bemüht hatten. Besonders bekannt sind da etwa das Delische Problem der Verdoppelung des Würfels, die Dreiteilung des Winkels und die Quadratur des Kreises. Diese an und für sich einfachen Aufgaben wurden dadurch zu Problemen, daß sich die Griechen eine künstliche Arbeitsbeschränkung auferlegten, indem sie verlangten, die konstruktive Lösung durch den ausschließlichen Gebrauch von Lineal und Zirkel zu bewerkstelligen. Das sind jene Geräte, die der technische Zeichner auch heute noch zum Ziehen von Geraden und Kreisen verwendet; die zusätzliche Benützung von Zeichendreiecken wäre noch als erlaubte Erleichterung anzusehen, da die mit ihrer Hilfe bequem zu zeichnenden Parallelen und Normalen prinzipiell auch durch umständlichere Konstruktionen mit Lineal und Zirkel allein zu finden sind. Das vom Techniker geübte Auftragen einer berechneten Strecke mittels eines Maßstabes wäre hingegen, wiewohl oft genauer als klassische Konstruktionen, von den Griechen niemals anerkannt worden. Sie sahen bereits den Einsatz von Instrumenten, die das mechanische Zeichnen von Kegelschnitten oder anderen speziellen Kurven gestatten, als durchaus unsportlich an, obwohl mit deren Hilfe die genannten Aufgaben exakt zu lösen gewesen wären. Erst GAUSS und LINDEMANN konnten die endgültige, allerdings negative Antwort geben, derzufolge die erwähnten Aufgaben unmöglich mit Lineal und Zirkel allein zu lösen sind. Trotzdem ist die Gilde der Trisezierer und Kreisquadrierer bis heute nicht ausgestorben, und

es gibt nach meiner Erfahrung nur ein probates Mittel, diese lästigen Zeitgenossen loszuwerden, nämlich ihnen für die Prüfung ihrer von vornherein sicher falschen Vorschläge eine Honorarnote anzukündigen. Immerhin sind diese Leute aber lebende Zeugen für den unwiderstehlichen Zauber, den die Geometrie auch auf Laien auszuüben vermag.

Auf den reizvollen Fragenkreis, den Umfang jener Probleme abzugrenzen, die sich durch zusätzliche oder anderweitige Einschränkungen der zeichnerischen Hilfsmittel konstruktiv lösen lassen, kann nur hingewiesen werden. Hierher gehören die Konstruktionen mit dem Lineal allein, mit dem Zirkel allein (was einen Mann wie NAPOLEON zu fesseln vermochte), mit einem „rostigen“ Zirkel, der nur Kreise einer bestimmten Größe zu schlagen gestattet, u. a. m.

Ein weiteres einschlägiges Problem, das zum letzten Teil meiner Ausführungen überleiten soll, ist die Konstruktion regelmäßiger Vielecke. Ein regelmäßiges Drei-, Vier-, Fünf- oder Sechseck ist leicht zu konstruieren; beim Siebeneck gelingt es jedoch nicht, beim Achteck wohl, beim Neuneck nicht, beim Zehneck wieder, und so fort in recht undurchsichtiger Folge. Das zahlentheoretische Kriterium für die Eckenzahl eines konstruierbaren Vielecks fand GAUSS in jungen Jahren, und die stolze Freude über die Lösung eines uralten Rätsels, über die Schönheit des endlich entschleierten Gesetzes ließ ihn sich endgültig der Mathematik zuwenden, deren „Princeps“ er werden sollte. Als neu ergab sich, daß auch das regelmäßige Siebzehneck konstruierbar sein müsse, und in Würdigung der wissenschaftlichen Großtat wurde später am Gauß-Denkmal in Braunschweig ein siebzehneckiges Emblem angebracht — wohl das einzige Mal, daß die bildende Kunst von dieser Figur Gebrauch machte. Demgegenüber kann man regelmäßigen Vielecken mit geringerer Eckenzahl in der Architektur immer wieder begegnen, nicht bloß bei klassischen Bauwerken, bei den Arabern und in der Gotik mit ihrem Hang zu strengem Maß, sondern auch in neuerer Zeit, wofür etwa das Pentagon in Washington als Beleg dienen möge.

Der Bann, den regelmäßige Figuren auf den Betrachter ausüben, hat seine Wurzel in der auffallenden Symmetrie, die alle Einzelheiten mehrfach wiederholt. Die Schönheit aller Ornamente beruht ja stets auf der gesetzmäßigen Wiederholung an sich oft belangloser Motive, wie sie jedes Stoff-, Tapeten- oder Teppichmuster zeigt. Dieses Wiederholungsprinzip, das die Rolle und Wirkung eines Einzelelementes durch Vervielfachung steigert oder überhaupt erst auslöst, ist schon in prähistorischer Zeit auf Keramiken und Schmuckgegenständen zu finden. Auch die Alten haben es bei ihren Säulenreihen ausgenützt, und die modernen Gebäudefassaden verdanken ihm manchmal den einzigen Reiz. Bereits die einfache Symmetrie, also die Spiegelung an einer Achse oder einer Ebene, die auch den Bau fast aller Erscheinungen organischen Lebens beherrscht, verfehlt nicht ihre Wirkung.

Geometrisch gesehen gestattet die axiale Symmetrie einer Figur eine kongruente Abbildung der Figur auf sich selbst, indem man jedem Punkt sein Spiegelbild zuordnet. Diese Abbildung, die alle Maße unverändert erhält, führt die symmetrische Figur in sich selbst über, wobei die beiden Seiten vertauscht werden. Wir befinden uns damit im Gebiet der Abbildungsgeometrie. Betrachten wir in Gedanken etwa eine Lilienblüte mit ihren sechs regelmäßig angeordneten Blütenblättern, so stellen wir fest, daß sie außer sechs Spiegelungen noch gewisse Drehungen um die Mittelachse erlaubt, nämlich jene, deren Winkel 60^0 oder ein Vielfaches davon beträgt; auch das sind kongruente, also maßtreue Transformationen, die die Blütenfigur mit sich selbst zur Deckung bringen, und ebenfalls sechs an der Zahl. Wir haben hier insgesamt zwölf kongruente Decktransformationen, die unsere Blüte in sich überführen. Es sind übrigens dieselben, die für ein regelmäßiges Sechseck in der Ebene grundlegend sind, und sie haben eine bemerkenswerte Eigenschaft: Wenden wir auf unsere Figur zwei dieser Transformationen hintereinander an, so gelangt sie in eine Endlage, die sich auch durch eine einzige (andere) Transformation aus unserem Vorrat von zwölfen hätte erreichen lassen. Zusammensetzung zweier der zwölf Decktransformationen liefert also immer wieder eine der zwölf. Ein System von Transformationen, aus welchem die Zusammensetzung nicht herausführt, nennt man eine Transformationsgruppe. Wir sind damit auf den wichtigen Gruppenbegriff gestoßen, der sich nicht nur für die moderne Geometrie, sondern für die ganze Mathematik als fundamental erwiesen und zu einer ganzen Gruppentheorie ausgewachsen hat.

Figuren, die eine Gruppe von Decktransformationen erlauben, zeichnen sich durch eine ausgeprägte gesetzmäßige Gliederung aus, durch ein hohes Ebenmaß im wahrsten Sinne des Wortes, dessen Schönheit auch den Uneingeweihten anrührt. Hierunter fallen in

der Ebene zunächst die regelmäßigen Vielecke und die von ihnen abgeleiteten Figuren; ihnen kommt insoferne eine Sonderstellung zu, als sie nur endlich viele Decktransformationen aufweisen. Ferner gehören hierher alle unbeschränkt fortsetzbaren Flächenornamente, von denen es, wie eine systematische Untersuchung lehrt, 17 wesentlich verschiedene Strukturgruppen gibt. Im dreidimensionalen Raum wird die Rolle der regelmäßigen Vielecke von den regulären Polyedern übernommen, das sind Körper, deren Oberfläche aus lauter gleichen regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt ist. Von diesen Körpern gibt es — im Gegensatz zu den regelmäßigen Vielecken in der Ebene — nicht mehr unendlich viele, sondern nur fünf. Es sind dies das regelmäßige Tetraeder, das Hexaeder oder der Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder. Diese sogenannten Platonischen Körper, deren Entdeckung zu den Glanzleistungen der Antike zählt, haben mit ihrer bezwingenden, reinen Schönheit sogar ernste Gelehrte zu mystischen Spekulationen verführt: So wollte KEPLER vor Entdeckung der nach ihm benannten Himmelsgesetze die Ordnung unseres Planetensystems auf eine Folge von sechs Kugeln gründen, die den fünf Platonischen Körpern in bestimmter Reihung abwechselnd ein- oder umgeschrieben waren (die drei äußeren Planeten Uranus, Neptun und Pluto waren damals noch nicht bekannt). Den zweidimensionalen Ornamenten entspricht im Raum eine ungleich reichere Mannigfaltigkeit von räumlichen Ornamenten, die zwar durch keine Beispiele in der bildenden Kunst zu belegen sind, dafür aber dem Bau der Kristalle zugrunde liegen, in denen die Anordnung der Moleküle den angedeuteten geometrischen Gesetzmäßigkeiten genügt.

Es wäre übertrieben, wollte man die Schönheit eines geometrischen Gebildes absolut von der Existenz einer Gruppe abhängig machen. Eher richtig ist schon die Umkehrung: wird die Struktur einer geometrischen Figur von einer Gruppe diktiert, dann ist die dadurch bedingte Harmonie der Ordnung im Aufbau ein guter Garant für die Schönheit des Erscheinungsbildes. Es sei nur an das Kaleidoskop erinnert, das ein paar bunte Glasscherben durch wiederholte Spiegelung zu anmutigen Rosetten vervielfältigt.

Sucht man schließlich Gebilde, die eine stetige Gruppe von unendlich vielen Decktransformationen vertragen, so findet man Figuren gesteigerter Symmetrie. In der Ebene gelangt man so zum Kreis, der bei allen möglichen Drehungen um seinen Mittelpunkt in sich übergeht. Im Raum trifft man auf die Dreh- und Schraubflächen, deren durch die Gruppe bedingte Eigenschaft „in sich bewegbar“ zu sein, die Wurzel ihrer vielseitigen technischen Anwendungen darstellt.

Natürlich braucht man sich bei den zugrundegelegten Decktransformationen nicht unbedingt nur auf kongruente zu beschränken. Zieht man statt dessen etwa Ähnlichkeitstransformationen heran, die zwar den Längenmaßstab verändern, aber wenigstens die Winkelgrößen noch erhalten, so findet man in der Ebene statt des Kreises die merkwürdige logarithmische Spirale, deren zahlreiche, fraglos schöne Eigenschaften den Mathematiker Johann BERNOULLI so faszinierten, daß er diese Kurve mit der Inschrift „Eadem mutata resurgo“ auf seinen Grabstein im Münster von Basel setzen ließ. Im Raum ergeben sich in Verallgemeinerung der Schraubflächen die weniger geläufigen Spiralflächen, die jedoch die Natur in schönster Vollkommenheit in Form von Schneckenhäusern und Muschelschalen ausbildet. Die konstruktive Behandlung solcher Spiralflächen habe ich übrigens in einer Jugendarbeit vor etwa 30 Jahren entwickelt.

Zu den Flächen mit der höchsten Zahl von Symmetrien gehört aber natürlich die Kugel. Ihr makelloses Ebenmaß hat unseren Dichter Franz Karl GINZKEY zu einer Ode inspiriert, mit der ich diesen Vortrag ausklingen lassen möchte, in welchem ich mich aufzuzeigen bemüht habe, daß einerseits das hehre Lehrgebäude der Geometrie von hoher gedanklicher Schönheit erfüllt ist, und anderseits die visuelle Schönheit vieler geometrischer Figuren durch das Vorhandensein einer Strukturgruppe zu erklären ist:

In meiner Urform Adel roll ich hin,
auch ich von einst, von Anbeginn.
Mir ward Vollendung also reich gespendet,
daß alle Schöpfung sich in mir vollendet.
Wer Raum und Tiefe nicht zu schauen weiß,
sieht mich als Kreis und immer nur als Kreis.
Der wahrhaft Sehende durchstaunt die Hülle,
er trinkt das Maß in wunderbarer Fülle.
In einem Punkt — und mehr bedarf es nicht —
ruht auf dem Irdischen mein Gleichgewicht.
Wär ich nicht dort der Trägheit hingegeben,
ich löste mich zum seligsten Entschweben.